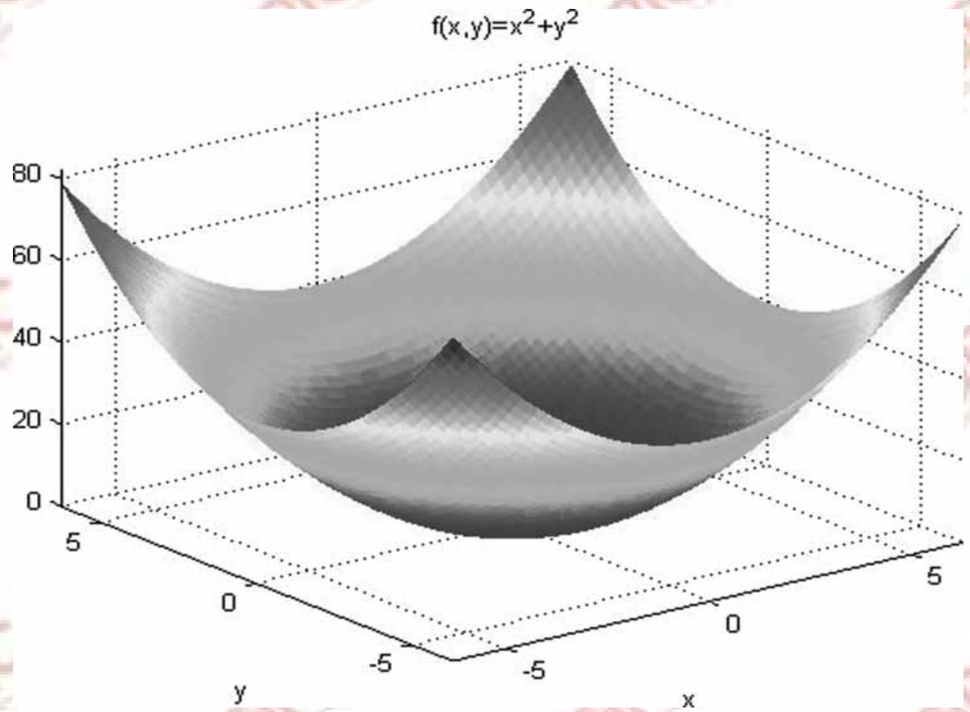
BÀI 4: HÀM NHIỀU BIẾN



Mục tiêu

Nắm được các khái niệm về hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, vi phân, cực trị nhiều biến .

Làm được bài tập về hàm nhiều biến, đặc biệt là phần cực trị hàm nhiều biến.

Thời lượng

Bài này được trình bày trong 3 tiết lý thuyết và 6 tiết bài tập. Bạn nên dành khoảng 3 đến 4 giờ đồng hồ mỗi tuần để học bài này.

Các kiến thức cần có

Các bạn cần có kiến thức về tính giới hạn hàm số (bài 1), phép tính đạo hàm vi phân (bài 2).

Nội dung

Bài này trình bày về hàm số nhiều biến số, phép tính giới hạn, tính chất liên tục và phép tính đạo hàm, vi phân của hàm nhiều biến. Sau đó áp dụng các kiến thức này vào bài toán cực trị, bài toán này có ý nghĩa rất lớn về mặt ứng dụng, tạo cơ sở toán học cho các bài toán tối ưu hoá trong kinh tế.

Hướng dẫn học

Các bạn cần xem kỹ các ví dụ và làm phần bài tập kèm theo.

4.1. Giới hạn và tính liên tục của hàm số

4.1.1. Khái niệm hàm nhiều biến

Khái niệm hàm số một biến số phản ánh sự phụ thuộc của một đối tượng (hàm số) vào một đối tượng khác (biến số), sự phụ thuộc này không phổ biến trong thực tế. Ví dụ như sản lượng của một nhà sản xuất luôn phụ thuộc vào nhiều yếu tố gồm có lao động, vốn…; giá cả của một hàng hoá trên thị trường không chỉ phụ thuộc vào chi phí sản xuất mà còn phụ thuộc vào yếu tố cung – cầu… Để phản ánh chính xác các hiện tượng thực tế, trong phần này chúng ta sẽ xét khái niệm hàm số nhiều biến số, phản ánh sự phụ thuộc của một đối tượng (hàm số) vào nhiều đối tượng khác (nhiều biến số). Đối với hàm một biến số, mỗi giá trị của biến độc lập sẽ đặt tương ứng với một giá trị của hàm. Đối với hàm số nhiều biến, mỗi bộ giá trị xác định của n biến số đặt tương ứng với một giá trị của hàm số. Nếu ta coi mỗi một bộ n biến số là một điểm (biến điểm) thì ta lại quay về định nghĩa hàm nhiều biến như hàm số của một biến điểm. Ta cần tìm hiểu một số khái niệm về bộ n biến số.

4.1.1.1. Không gian n chiều

Trong chương trình phổ thông, chúng ta đã biết trong mặt phẳng với hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxy cho trước, mỗi một điểm M được đặt tương ứng với một bộ hai số sắp thứ tự (x,y) cũng chính là toạ độ của M trong hệ toạ độ đã chọn; trong không gian ba chiều với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz cho trước, mỗi một điểm M được đặt tương ứng với một bộ ba số sắp thứ tự (x,y,z). Khái quát lên chúng ta cũng có khái niệm điểm trong không gian n chiều.

Định nghĩa:

Mỗi bộ n số thực sắp thứ tự $(x_1,x_2,...,x_n)$ được gọi là một điểm n chiều. Ta ký hiệu điểm bởi chữ in hoa $M(x_1,x_2,...,x_n)$.

Định nghĩa:

Không gian điểm n chiều (không gian n chiều) là tập hợp tất cả các điểm n chiều, trong đó khoảng cách giữa hai điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ và $N(y_1,y_2,...,y_n)$ được cho bởi công thức:

$$d(M,N)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}\,.$$

Không gian n chiều được ký hiệu bởi $\mathbb{R}^n$

Trong trường hợp $n=2, n=3$ ta thấy rằng công thức tính khoảng cách nói trên cũng chính là khoảng cách Euclide đã biết trong mặt phẳng và không gian.

4.1.1.2. Hàm nhiều biến

Định nghĩa:

Một hàm n biến số là một quy tắc $f: D\to\mathbb{R}$, với D là một tập hợp con của không gian n chiều $\mathbb{R}^n$, cho tương ứng mỗi điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ với một và chỉ một giá trị $f(M)\in\mathbb{R}$. D được gọi là miền xác định của hàm số.

Ta cũng sử dụng ký hiệu $u=f(x_1,x_2,...,x_n);(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ để chỉ hàm số này.

Ví dụ 1:

Cho hàm số $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_n^2}$.

Miền xác định của hàm số này là:

$$D=\left\{M(x_1,...,x_n): x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\le 1\right\}.$$

Miền xác định tự nhiên của một hàm nhiều biến là các bộ n số sao cho khi thay vào biểu thức của hàm số thì các phép toán đều có ý nghĩa.

Trong nội dung của giáo trình chúng ta thường xét các hàm số hai biến làm ví dụ, các hàm số này ký hiệu bởi $z(x,y); f(x,y); u(x,y)...$, với $(x,y)\in D\subset \mathbb{R}^2$.

Định nghĩa:

Miền giá trị của hàm số $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ là tập hợp tất cả các giá trị của hàm số khi điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ biến thiên trong miền xác định D.

Ví dụ 2:

- Hàm số $f:D\to\mathbb{R}$, trong đó $D: x^2+y^2\le 1$, $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, miền giá trị là: $z\ge 0$.
- Hàm số $f:D\to\mathbb{R}$ trong đó $D: x+y<1$, $f(x,y)=\ln(1-x-y)$, miền giá trị là: $(-\infty,+\infty)$.

4.1.1.3. Ý nghĩa hình học của hàm hai biến

Định nghĩa:

Đồ thị của hàm số $z=z(x,y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M'(x,y,z)$ trong không gian $\mathbb{R}^3$, trong đó (x,y) là toạ độ của điểm M thuộc miền xác định D và z là giá trị của hàm số tại điểm đó.

Đồ thị của hàm hai biến số là một mặt trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3:

- Đồ thị của hàm số $z=z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ là nửa mặt cầu có tâm tại gốc toạ độ O và bán kính $R=1$ nằm trong nửa không gian $z\ge 0$.
- Đồ thị của hàm số $z=\sqrt{x^2+y^2}$ là mặt nón tròn xoay trục Oz, nằm trong nửa không gian $z\ge 0$.

4.1.2. Giới hạn của hàm nhiều biến

4.1.2.1. Định nghĩa

Định nghĩa:

Ta nói dãy điểm $\{M_k(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k)\}$ có giới hạn là (hội tụ đến) điểm $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nếu $\lim\limits_{k\to\infty} d(M_k,M)=0$; hay tương đương $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0; 1\le i\le n$.

Ví dụ 4:

Dãy điểm $\left\{M_n\left(\frac{n}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right\}$ hội tụ về điểm $(1,0)$ khi $n\to+\infty$, vì:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Cho hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n):D\to\mathbb{R}$, và một điểm $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ trong không gian sao cho tồn tại các dãy điểm $\{M_n\}$ thuộc D hội tụ về điểm M_0 khi $n\to\infty$.

Định nghĩa: Nếu với mọi dãy số $\{M_n\}$ hội tụ về điểm M_0, tồn tại giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=l$$

thì ta nói hàm số $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ có giới hạn l khi $M\to M_0$. Ký hiệu:

$$\lim_{x_i\to x_i^0} f(x_1,x_2,...,x_n)=l \text{ hoặc } \lim_{M\to M_0} f(M)=l.$$

Ví dụ 5:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(x+y^2)=1.$$

Thật vậy chọn dãy điểm $\{M_n(x_n,y_n)\}$ bất kỳ hội tụ đến điểm $(1,0)$; tức là:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1;\lim_{n\to\infty} y_n=0.$$

Thì: $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n^2)=1$.

Theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(x+y^2)=1.$$

4.1.2.2. Tính chất

Định lý:

Giả sử $f(M);g(M)$ là hai hàm số có giới hạn khi $M\to A$. Khi đó:

- $\lim_{M\to A}\left[f(M)\pm g(M)\right]=\lim_{M\to A} f(M)\pm\lim_{M\to A} g(M)$
- $\lim_{M\to A}\left[kf(M)\right]=k\lim_{M\to A} f(M)$ (k là hằng số)
- $\lim_{M\to A}\left[f(M)g(M)\right]=\lim_{M\to A} f(M)\lim_{M\to A} g(M)$
- $\lim_{M\to A}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{\lim_{M\to A} f(M)}{\lim_{M\to A} g(M)}$ nếu $\lim_{M\to A} g(M)\neq 0$.

Ví dụ 6:

a) Tìm $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ta có: $0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x| \to 0$ khi $x \to 0$.

Theo nguyên lý giới hạn kẹp suy ra:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

b) Tìm: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$.

Ta có: $0 \le \left|\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x\sin y - y\sin x}{2xy}\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right| \to 0$ Khi $x, y \to 0$.

Theo nguyên lý kẹp suy ra:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = 0.$$

Ta thường sử dụng nguyên lý giới hạn kẹp để tìm giới hạn của hàm số.

c) Tìm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Ta chứng minh không tồn tại giới hạn nói trên.

Thật vậy, xét hai dãy điểm cùng hội tụ đến điểm $(0,0)$ khi $n \to \infty$ là:

$$\{M_n\}; M_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ và } \{M_n'\}; M_n'\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right).$$

Ta có với: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \frac{1}{2}; \lim_{n\to\infty} f(M_n') = \frac{2}{5}.$$

Như vậy với hai dãy điểm khác nhau cùng tiến về điểm $(0,0)$ thì hai giới hạn tương ứng của hai dãy giá trị hàm số không bằng nhau. Vậy không tồn tại giới hạn nói trên.

d) Tìm: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+3y^2}$.

Xét hai dãy điểm cùng tiến về điểm $(0,0)$ khi $n \to \infty$:

$$\{M_n\}; M_n = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}\right) \text{ và } \{M_n'\}; M_n' = \left(\frac{1}{n}; \frac{2}{n^2}\right).$$

Với: $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+3y^2}$, ta tìm được giới hạn của hai dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{n\to\infty} g(M_n) = \frac{1}{4}; \lim_{n\to\infty} g(M_n') = \frac{2}{13}.$$

Vậy không tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+3y^2}$.

CHÚ Ý :

Chúng ta cần phân biệt khái niệm giới hạn nói trên khi *x, y* đồng thời tiến đến điểm x_0, y_0 với hai giới hạn lặp, đó là khi ta lấy giới hạn theo *x* trước *y* sau; hoặc theo y trước x sau:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} g(x,y) \text{ và } \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} g(x,y)$$

Nói chung giới hạn đồng thời và giới hạn lặp không liên quan đến nhau, có thể giới hạn đồng thời tồn tại nhưng không tồn tại giới hạn lặp và ngược lại.

Ví dụ 7:

a) Trong ví dụ 6 ta đã thấy giới hạn khi x, y đồng thời tiến đến điểm 0 không tồn tại, tuy nhiên hai giới hạn lặp tồn tại:

$$\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0 \, (\forall x \neq 0) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x,y) = 0 \, (\forall y \neq 0) \Rightarrow \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y) = 0.$$

b) Xét giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

Ta có: $0 \le \left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right| \le |x+y| \to 0$ khi $x, y \to 0$.

Theo nguyên lý giới hạn kẹp:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Tuy nhiên từng giới hạn lặp không tồn tại. Thật vậy do vai trò của x, y như nhau nên ta xét giới hạn lặp theo x trước, y sau. Với $y \neq 0$:

$$I = \lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = \sin\frac{1}{y}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

không tồn tại, nên cũng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

4.1.3. Hàm số liên tục

Khái niệm hàm nhiều biến số liên tục được định nghĩa như trong trường hợp của hàm số một biến số.

Định nghĩa:

Cho hàm số $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$, và M_0 là một điểm thuộc D. Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm M_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Nếu hàm số $f(M)$ liên tục tại mọi điểm M_0 thuộc miền D ta nói $f(M)$ liên tục trên D.

Ví dụ 8:

Ta đã biết $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = 0$, nên hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

liên tục tại điểm $(0,0)$.

Từ định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm nhiều biến số, ta chứng minh được định lý sau đây về hàm liên tục.

Định lý:

Giả sử $f(M);g(M)$ là hai hàm số của biến điểm n chiều $M(x_1,x_2...,x_n)$ liên tục tại điểm M_0. Ta có:

- Các hàm số $f(M)\pm g(M)$ và $f(M)g(M)$ cũng liên tục tại điểm M_0.
- Nếu $g(M_0)\neq 0$ thì hàm số $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ cũng liên tục tại điểm M_0.

Các định lý về hàm một biến liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$ cũng được mở rộng cho hàm nhiều biến liên tục trên tập D.

Định lý:

Giả sử hàm số $f(M)$ của biến điểm n chiều $M(x_1,x_2,...,x_n)$ xác định và liên tục trên miền D với $D=\{(x_1,x_2,...,x_n): a_1\le x_1\le b_1; a_2\le x_2\le b_2;...;a_n\le x_n\le b_n\}$.

Khi đó:

- Hàm số $f(M)$ bị chặn trên miền D, nghĩa là tồn tại một hằng số $K>0$ sao cho:

  $$f(M)\le K; \forall M\in D.$$

- Hàm số $f(M)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D.
- Giả sử A,B là hai điểm thuộc miền D sao cho $f(A)f(B)<0$ thì tồn tại một điểm $C\in D$ sao cho $f(C)=0$.

Nói riêng các định nghĩa và định lý nói trên đều đúng cho trường hợp $n=2$.

Ví dụ 9:

a) Xét hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Tại những điểm $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)$ là thương của hai hàm số liên tục với mẫu số khác 0, nên $f(x,y)$ liên tục tại điểm đó.

Tại điểm $(0,0)$, theo ví dụ đã xét $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0=f(0,0)$ nên hàm số liên tục tại $(0,0)$. Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{khi } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Tại những điểm $(x,y)\neq(0,0)$ hàm số $f(x,y)$ liên tục.

Tại điểm (0,0), ta cần tính giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$.

Xét hai dãy điểm cùng tiến đến (0,0) khi $n\to\infty$

$$\{M_n\};M_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \text{ và } \{M_n'\};M_n'\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right).$$

Giới hạn của hai dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=0;\lim_{n\to\infty} f(M_n')=\frac{12}{17},$$

do đó không tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$.

Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại (0,0) .

4.2. Đạo hàm riêng và vi phân riêng

4.2.1. Số gia riêng và số gia toàn phần

Một hàm nhiều biến $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ có thể xem như là hàm số của một biến số khi ta cố định giá trị của các biến còn lại. Từ đây có thể định nghĩa số gia riêng của một hàm nhiều biến đối với một biến số nào đó. Trước hết ta xét với $n=2$.

Xét hàm số $z=f(x,y)$ xác định trên miền D, và $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm thuộc miền D. Cố định giá trị $y=y_0$ và cho x thay đổi một lượng Δx thì giá trị của hàm số thay đổi là:

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

Ta gọi $\Delta_x z$ là số gia riêng theo biến x của hàm số $z=f(x,y)$.

Tương tự số gia riêng theo biến y của hàm số $z=f(x,y)$ tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ là:

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Số gia toàn phần biểu thị sự thay đổi giá trị của hàm số khi cả hai biến đồng thời thay đổi. Nếu x thay đổi lượng Δx, y thay đổi lượng Δy, thì số gia toàn phần của hàm số là:

$$\Delta z(x_0,y_0)=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Ví dụ 10:

Cho hàm số: $z = f(x, y) = xy$

Các số gia riêng theo biến x và biến y tại điểm (x_0, y_0) là:

$$\Delta_x z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0 - x_0 y_0 = y_0 \Delta x$$

$$\Delta_y z(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 \Delta y.$$

Số gia toàn phần của hàm số là:

$$\Delta z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y.$$

Tổng quát, xét hàm số của biến điểm n chiều $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Số gia riêng theo biến x_i, $1 \le i \le n$, tại điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ là:

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0 ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0 ..., x_n^0).$$

Số gia toàn phần của hàm số tại điểm đó là:

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0).$$

4.2.2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến. Đạo hàm riêng của hàm hợp

4.2.2.1. Đạo hàm riêng

Định nghĩa:

Đạo hàm riêng của hàm n biến $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo biến $x_i; (1 \le i \le n)$ là giới hạn của tỉ số giữa số gia riêng theo biến x_i của hàm số và số gia của biến x_i khi số gia này tiến tới 0

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}.$$

Đạo hàm riêng thực chất là đạo hàm riêng theo một biến số khi tất cả các biến còn lại nhận giá trị cố định. Do đó khi tính đạo hàm riêng theo biến nào thì ta coi các biến còn lại như là hằng số, và tính đạo hàm theo biến đang xét.

Ví dụ 11:

Cho hàm số $u = x^2 + 3xy^2 - z^4$. Ta có:

$$u_x' = 2x + 3y^2; u_y' = 6xy; u_z' = -4z^3.$$

Trong trường hợp $n = 2$, xét hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong một miền D; $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm thuộc D. Đạo hàm riêng của f đối với biến x và biến y tại điểm M_0 là:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ta sử dụng công thức nói trên để tính đạo hàm tại một điểm, còn đối với hàm số cho bởi công thức, ta sẽ áp dụng cách tính đã nói ở trên: Khi tính f_x' ta coi hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số x, ngược lại khi tính f_y' ta coi hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số y.

Ví dụ 12:

a) Tính các đạo hàm riêng của $f(x,y) = x^2(y+2) + \text{tg}\,(xy) + \arcsin\dfrac{y-1}{x}$ tại điểm (0,1).

Ta có: $y_0 = 1$, $f(x,1) = 3x^2 + \text{tg}\,x$ suy ra:

$$f'_x(0,1) = (3x^2 + \text{tg}x)'(0) = 6.0 + \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$
$$f'_x(x_0,1) = (3x^2 + \text{tg}x)'(x_0) = 6x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

b) $z = x^3y + \text{arctg}\,(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + \frac{1}{1+(x+y)^2};\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \frac{1}{1+(x+y)^2}.$$

c) $z = x^y, (x > 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tại điểm $(x,y) \neq (0,0)$ ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-yx^2+y^3}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tại điểm $(x,y) = (0,0)$ ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

4.2.2.2. Công thức đạo hàm hàm hợp

Trước hết ta nêu khái niệm hàm số hợp của hai hàm nhiều biến số.

Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$. Xét ánh xạ $\varphi : D \to \mathbb{R}^2; \varphi(x,y) = (u(x,y); v(x,y))$ và hàm số hai biến $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}; f(u,v) \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $F = f \circ \varphi : D \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$F : (x,y) \in D \overset{\varphi}{\mapsto} (u(x,y), v(x,y)) \in \varphi(D) \overset{f}{\mapsto} f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y).$$

Hàm số F được xác định như trên được gọi là hàm số hợp của hai hàm f và φ.

Định lý:

Nếu hàm số f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u};\frac{\partial f}{\partial v}$ là các hàm liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u,v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì trong D tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y}$ và ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Tổng quát giả sử $w = f(u_1, u_2, ..., u_m): D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ và mỗi biến số $u_i; (1 \le i \le m)$ lại là hàm số của n biến $u_i = u_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. Xét hàm số:

$$w = f\left[u_1(x_1,...,x_n),...,u_m(x_1,...,x_n)\right] = g(x_1,...,x_n)$$

cho tương ứng mỗi biến điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ với một giá trị $w = g(x_1, ..., x_n)$ như trên. Quy tắc này cho ta hàm số hợp của các hàm số nhiều biến $w = f(u_1, ..., u_m)$ và

$$u_i = u_i(x_1,...,x_n); 1 \le i \le m.$$

Đạo hàm riêng của hàm số w theo biến x_i được tính theo công thức:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial w}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, (1 \le i \le n).$$

Ví dụ 13:

Cho hàm số: $z = u^v, u = xy, v = x^2 + y^2$.

Theo ví dụ 12: $\frac{\partial z}{\partial u} = vu^{v-1}; \frac{\partial z}{\partial v} = u^v \ln u$. Áp dụng định lý về đạo hàm hàm hợp, ta được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + y^2)(xy)^{x^2+y^2-1} y + 2x(xy)^{x^2+y^2} \ln(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)(xy)^{x^2+y^2-1} x + 2y(xy)^{x^2+y^2} \ln(xy).$$

Sau đây là một số trường hợp đặc biệt của hàm số hợp, ta nêu công thức đạo hàm hàm hợp để sử dụng thuận tiện hơn.

- Nếu $z = f(x, y), y = y(x)$ thì ta viết lại được $z = f(x, y(x)) = F(x)$ là một hàm số của x, khi đó:

$$F'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y'(x).$$

- Nếu $z = f(x, y)$, trong đó $x = x(t), y = y(t)$ thì $z = f(x(t), y(t)) = F(t)$. Khi đó:

$$F'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} x'(t) + \frac{\partial y}{\partial t} y'(t).$$

4.2.3. Vi phân toàn phần và vi phân riêng

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc D. Xét số gia toàn phần của hàm số tại điểm M_0

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ta biến đổi biểu thức này:

$$\Delta f = \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)\right] + \left[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\right].$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại điểm c_1 nằm giữa $y_0 + \Delta y$ và y_0; và điểm c_2 nằm giữa $x_0 + \Delta x$ và x_0 sao cho: $\Delta f = f_y'(x_0 + \Delta x, c_1) + f_x'(c_2, y_0)$.

Theo giả thiết hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục nên ta viết được:

$$f_x'(c_2, y_0) = f_x'(x_0, y_0) + \alpha; f_y'(x_0 + \Delta x, c_1) = f_y'(x_0, y_0) + \beta$$

trong đó α, β phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$ và có giới hạn bằng 0 khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Do đó số gia của hàm số tại điểm M_0 được viết lại thành:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Từ biểu thức này ta định nghĩa hàm số khả vi.

Định nghĩa:

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có biểu thức số gia toàn phần tại điểm M_0 có thể viết ở dạng:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

trong đó A, B là các số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 và α, β có giới hạn bằng 0 khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, thì f được gọi là khả vi tại điểm M_0 và biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$ tại điểm M_0, ký hiệu là df.

Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại mọi điểm M thuộc miền D thì $f(x, y)$ được gọi là khả vi trên miền D.

Từ biến đổi trên ta có một điều kiện đủ về tính khả vi của một hàm số hai biến.

Định lý:

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trên một lân cận U:
$U = \{(x, y) : |x - x_0| < \varepsilon; |y - y_0| < \delta\}$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng liên tục tại M_0 thì hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm M_0 và $dz(M_0) = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy$.

> CHÚ Ý:
> Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm M_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Ví dụ 14:

Cho hàm số: $z = f(x, y) = x^3y + 2xy^2$.

Từ: $z_x' = 3x^2y + 2y^2; z_y' = x^3 + 4xy$; suy ra :

$$dz = df = \left(3x^2y + 2y^2\right)dx + \left(x^3 + 4xy\right)dy.$$

Tổng quát, cho hàm số $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Vi phân toàn phần của hàm số là:

$$du = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Nếu như ta xét hàm số nói trên như là hàm số của một biến số độc lập $x_i; (1 \le i \le n)$ (coi các biến số còn lại là hằng số) thì vi phân của hàm một biến tương ứng được gọi là vi phân riêng của hàm số $u = f(x_1, ..., x_n)$ theo biến x_i. Vi phân riêng này được ký hiệu và tính theo công thức:

$$d_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

Dễ thấy vi phân toàn phần bằng tổng của các vi phân riêng:

$$df = d_{x_1} f + d_{x_2} f + ... + d_{x_n} f.$$

4.2.4. Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Ta sử dụng công thức sau đây để tính gần đúng giá trị của hàm hai biến tại một điểm:
$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$.

Ví dụ 15:

a) Tính gần đúng $\text{arctg}\frac{1,03}{0,98}$.

Xét hàm số $z = \text{arctg}\frac{x}{y}$. Chọn $x_0 = y_0 = 1; \Delta x = 0,03; \Delta y = -0,02$.

Ta có: $z'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}; z'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow z'_x(1,1) = \frac{1}{2}; z_y'(1,1) = -\frac{1}{2}$.

Theo công thức:

$$\text{arctg}\frac{1,03}{0,98} \approx z(1,1) + \frac{1}{2}.0,03 - \frac{1}{2}(-0,02) = \frac{\pi}{4} + 0,025 = 0,81(\text{rad}).$$

b) Tính gần đúng: $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,04)^2}$.

Xét hàm số: $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. Chọn $x_0 = 1, y_0 = 0, \Delta x = 0,02; \Delta y = 0,04$.

Ta có: $z'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}; z'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \Rightarrow z'_x(1,0) = \frac{2}{3}; z'_y(1,0) = 0$.

Suy ra: $A = z(1,02; 0,04) \approx z(0,1) + \frac{2}{3}.0,02 + 0.0,04 = 1,013$.

4.2.5. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

4.2.5.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Ta biết đạo hàm cấp cao của hàm một biến số được định nghĩa theo quy nạp: đạo hàm cấp n bằng đạo hàm của đạo hàm cấp (n -1). Đối với hàm nhiều biến, khái niệm tương ứng là đạo hàm riêng và đạo hàm riêng cấp cao.

Cho hàm số $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có đạo hàm riêng theo các biến x_i trong miền D. Khi đó các đạo hàm riêng f_{x_i}' cũng là các hàm số của n biến số. Đạo hàm riêng theo biến x_j của đạo hàm riêng cấp một f_{x_i}' được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $u = f(x_1, ..., x_n)$ theo biến x_i và x_j và được ký hiệu là :

$$u''_{x_i x_j} = f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Tương tự ta định nghĩa theo quy nạp các đạo hàm riêng cấp cao hơn.

Khi $n = 2$, xét hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên miền D. Ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai được ký hiệu như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y); \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y); \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Ví dụ 16:

Cho hàm số $z = x^3y^4 - 4xy^2$.

Ta có $z'_x = 3x^2y^4 - 4y^2; z'_y = 4x^3y^3 - 8xy$ và

$$z''_{x^2} = 6xy^4; z''_{xy} = 12x^2y^3 - 8y = z''_{yx}; z''_{y^2} = 12x^3y^2 - 8x.$$

Nhận xét:

Trong ví dụ trên $z''_{xy} = z''_{yx}$. Tuy nhiên không phải bao giờ đẳng thức này cũng xảy ra. Định lý sau cho biết một điều kiện đủ để hai đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau.

Định lý (Schwarz):

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

4.2.5.2. Vi phân cấp cao

Định nghĩa:

Vi phân toàn phần của vi phân toàn phần du của hàm số $u = f(x_1, ..., x_n)$ được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của hàm số đó và được ký hiệu là: $d^2u = d^2f$.

Ta tính được: $d^2f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$.

Nói riêng với $n = 2$, hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai, thì vi phần toàn phần cấp hai của hàm số đó là:

$$d^2z = d(dz) = f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{yx} + f''_{xy})dxdy + f''_{y^2}(dy)^2.$$

Giả thiết f_{xy}'' và f_{yx}'' liên tục, suy ra:

$$d^2z = f''_{x^2}(dx)^2 + 2f''_{yx}dxdy + f''_{y^2}(dy)^2.$$

Ví dụ 17:

Cho hàm số $z = e^x \cos y$.

Ta có: $z'_x = e^x \cos y;\ z'_y = -e^x \sin y$ và

$$z''_{x^2} = e^x \cos y; z''_{yx} = z''_{xy} = -e^x \sin y; z''_{y^2} = -e^x \cos y.$$

Suy ra: $d^2z = e^x(\cos y dx^2 - 2\sin y dxdy - \cos y dy^2)$

$$d^2z(0,\pi) = -dx^2 + dy^2.$$

4.3. Cực trị của hàm nhiều biến

4.3.1. Cực trị không điều kiện

Định nghĩa: Tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập mở nếu D có tính chất, với mọi điểm $M \subset D$ tồn tại một số dương $r > 0$ sao cho mọi điểm N trong không gian n chiều thoả mãn $d(M,N) < r$ đều thuộc D.

Định nghĩa:

Cho hàm số $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định trên một tập mở D và $M_0 \in D$. Ta nói hàm số $f(x_1,...,x_n)$ đạt cực trị tại điểm M_0 nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho với mọi điểm $M \in D$ và $d(M, M_0) < r$ thì hiệu $f(M) - f(M_0)$ không đổi dấu.

Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu, nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ thì M_0 là điểm cực đại. Điểm M_0 được gọi là điểm cực trị của hàm số.

Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét quy tắc tìm cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$.

Định lý 1:

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm M_0 mà tại điểm đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M_0); q = f'_y(M_0)$ tồn tại thì $p = q = 0$.

Như vậy nếu đặt thêm giả thiết rằng hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng thì ta đã vét hết được tất cả các điểm có khả năng xảy ra cực trị. Thêm nữa, ta giả sử các đạo hàm riêng cấp hai cũng tồn tại và liên tục trên miền xác định D.

Ký hiệu: $r = f''_{xx}(M); s = f''_{xy}(M); t = f''_{yy}(M)$

Định lý 2:

Giả sử $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Giả sử tại M_0 ta có $p = q = 0$. Khi đó tại M_0:

* Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0; cực đại nếu $r < 0$, cực tiểu nếu $r > 0$.
* Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_0.

- Nếu $s^2 - rt = 0$ thì $f(x,y)$ có thể đạt hoặc không đạt cực trị tại M_0 (trường hợp nghi ngờ).

Từ hai định lý trên, ta rút ra quy tắc tìm cực trị.

- Bước 1: tìm các điểm dừng, có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình $f'_x = f'_y = 0$.
- Bước 2: tính các giá trị đạo hàm riêng cấp hai tại các điểm dừng $r = f''_{xx}(M); s = f''_{xy}(M); t = f''_{yy}(M)$ và xét dấu biểu thức $\Delta = s^2 - rt$.
    - Nếu $\Delta > 0$, hàm số không đạt cực trị tại M_0.
    - Nếu $\Delta < 0$, hàm số đạt cực trị tại M_0: $r > 0$, M_0 là điểm cực tiểu; $r < 0$, M_0 là điểm cực đại.
    - Nếu $\Delta = 0$, không thể kết luận M_0 có là điểm cực trị hay không.

Ví dụ 18:

a) Tìm cực trị của hàm số $z = x + y - xe^y$.

Tìm các điểm tới hạn:

$$\begin{cases} z'_x = 1 - e^y = 0 \\ z'_y = 1 - xe^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Tính các giá trị đạo hàm cấp hai

$$r = 0, s = -1, t = -1 \Rightarrow \Delta = 1 > 0$$

suy ra hàm số không đạt cực trị tại điểm (1,0).

b) Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$.

Tìm các điểm tới hạn:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ z'_y = 6y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Tính các giá trị $r = z''_{xx} = 6x; s = z''_{xy} = 0; t = z''_{yy} = 12y$.

Tại điểm (1,1): $\Delta < 0, r > 0$: hàm số đạt cực tiểu tại (1,1).

Tại điểm (-1,-1): $\Delta < 0, r < 0$: hàm số đạt cực đại tại (-1,-1).

Tại điểm (1,-1) và (-1,1): $\Delta = 72 > 0$, hàm số không đạt cực trị.

4.3.2. Hàm ẩn

Cho phương trình:

$$F(x,y) = 0 \qquad (4.1)$$

trong đó $F: D \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$. Với mỗi giá trị $x = x_0$ trong một khoảng $I \subset \mathbb{R}$ nào đó có thể có một hay nhiều giá trị y_0 sao cho $F(x_0, y_0) = 0$. Khi đó ta nói phương trình (4.1) xác định một hay nhiều hàm số ẩn y theo biến x trong khoảng I.

Định nghĩa:

Hàm số $y(x): I \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (4.1) nếu:

$$\forall x \in I, (x, y(x)) \in D \text{ và } F(x, y(x)) = 0.$$

Ví dụ 19:

Phương trình: $x^2 + y^2 = 4; (0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2)$ xác định cho ta một hàm ẩn

$$y = \sqrt{4 - x^2}; (0 \le x \le 2).$$

Tuy nhiên không phải bao giờ từ phương trình dạng $F(x, y) = 0$ ta cũng có thể giải ra được tường minh hàm ẩn $y = y(x)$ thành dạng hàm số của x.

Ví dụ như phương trình $x^y = y^x, (x, y > 0)$. Tuy nhiên trong những trường hợp nhất định ta có thể nói về tính khả vi của hàm ẩn mà không cần giải tường minh ra phương trình $y = y(x)$.

Định lý:

Cho phương trình (4.1) trong đó $F: D \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử $(x_0, y_0) \in D$ và $F(x_0, y_0) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \ne 0$ thì phương trình (4.1) xác định trong một lân cận $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) của x_0 một hàm số ẩn $y = y(x)$ duy nhất, thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$; $y(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận I nói trên.

Để tính đạo hàm hàm ẩn, ta thay công thức $y(x)$ vào phương trình (4.1) và thu được đồng nhất thức: $F(x, y(x)) \equiv 0$.

Đạo hàm hai vế theo x ta có:

$$F_x' + y'(x) F_y' = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

Ví dụ 20:

a) Giả sử phương trình $x^3 y - y^3 x = a^4$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$.

Ta có: $F(x, y) = x^3 y - y^3 x - a^4 = 0$.

Thay $y = y(x)$, ta được đồng nhất thức:

$$F(x, y) = x^3 y(x) - y^3(x) x - a^4 = 0.$$

Đạo hàm hai vế theo biến x:

$$3x^2y + x^3y' - 3y^2y'x - y^3 = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3}.$$

b) Giả sử phương trình $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$.

Tính $y'(0)$.

Tại điểm: $x = 0$; $F(0, y(0)) = y(0) - 1 = 0$ suy ra: $y(0) = 1$.

Ta có: $F(x, y) = xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

Thay $y = y(x)$ ta được đồng nhất thức:

$$xe^y + ye^x - e^{xy} \equiv 0.$$

Đạo hàm hai vế theo biến x:

$$e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x - ye^{xy} - xy'e^{xy} = 0.$$

Suy ra: $y'(x) = -\dfrac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$.

Thay $x = 0, y = 1$ có $y'(0) = -e$.

c) Giả sử phương trình $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$.

Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} - \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x + yy' - (xy' - y) = 0.$$

Với điều kiện $y \neq x$, ta tìm được đạo hàm của hàm ẩn

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$y'' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{2(xy' - y)}{(x - y)^2}.$$

Thay biểu thức của y', ta được:

$$y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$

Tương tự như vậy ta có thể tính tiếp các đạo hàm cấp cao hơn của hàm ẩn.

d) Tìm các điểm cực trị của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Đặt $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Điều kiện để tồn tại hàm ẩn là: $F_y' = 3y^2 - 3x \neq 0$.

Điểm dừng của hàm ẩn $y'(x) = 0$, suy ra $F_x' = 0$.

Giải hệ: $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ 3x^2 - 3y \qquad = 0 \\ y^2 \neq x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}; y = \sqrt[3]{4}.$

Ta cần kiểm tra điều kiện đủ $y''(x) < 0$. Ta có:

$$y'(x) = -\frac{F_x'}{F_y'} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Suy ra: $$y''(x) = \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}.$$

Thay $x = \sqrt[3]{2}; y = \sqrt[3]{4}; y'(\sqrt[3]{2}) = 0$, ta được $y''(\sqrt[3]{2}) = -\sqrt[3]{4} < 0$. Vậy $x = \sqrt[3]{2}$ là điểm cực đại của hàm ẩn đã cho, $y_{CĐ} = \sqrt[3]{4}$.

4.3.3. Cực trị có điều kiện

4.3.3.1. Cực trị có điều kiện

Trong 4.3.1 ta đã xét bài toán cực trị không có điều kiện, tức là giữa các biến độc lập xuất hiện trong hàm số không ràng buộc nhau. Tuy nhiên trong thực tế nhiều trường hợp giữa các biến này sẽ có sự ràng buộc lẫn nhau. Ví dụ như một người tiêu dùng muốn mua hai loại hàng hoá nào đó, số lượng mua được càng nhiều thì càng thoả mãn tâm lý của người đó, tuy nhiên với số tiền mua hàng có hạn thì người đó buộc phải lựa chọn mua mỗi loại sản phẩm bao nhiêu đơn vị để đem lại lợi ích tốt nhất. Đó chính là một bài toán tìm cực trị có điều kiện.

Định nghĩa:

Cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ trong đó hai biến x và y bị ràng buộc bởi hệ thức $g(x,y) = 0$ là cực trị có điều kiện.

Một cách hiển nhiên ta nghĩ đến khả năng từ phương trình $g(x,y) = 0$ có thể giải ra hàm ẩn $y = y(x)$. Khi đó bài toán cực trị có điều kiện được chuyển về tìm cực trị của hàm số một biến số $w = f\left[x, y(x)\right] = h(x)$. Tuy nhiên trong 4.3.2 ta đã biết không phải bao giờ cũng giải ra được tường minh công thức của hàm ẩn. Do đó ta cần một quy tắc kiểm tra trực tiếp, sau đây là quy tắc tìm cực trị có điều kiện.

4.3.3.2. Quy tắc tìm cực trị có điều kiện

Xét hàm số phụ:

$$\Phi(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

Biến phụ λ gọi là nhân tử Lagrange. Ta thấy rằng với tất cả các điểm (x,y) thoả mãn điều kiện $g(x,y)=0$ thì hai hàm số $f(x,y);\Phi(x,y)$ nhận cùng một giá trị. Do đó cực trị của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ cũng là một cực trị của hàm số $\Phi(x,y)$. Do đó các điểm mà tại đó cực trị có điều kiện xảy ra phải rơi vào các điểm dừng của hàm số $\Phi(x,y)$. Ta có quy tắc sau đây:

Quy tắc tìm cực trị có điều kiện:

- Bước 1: Xét hàm số $\Phi(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

  Tìm các điểm dừng của hàm phụ thoả mãn hệ phương trình $\begin{cases}\Phi'_x=\Phi'_y=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$

- Bước 2: Xét hiệu $\Delta=f(M)-f(M_0)$, trong đó M thuộc lân cận đủ bé của M_0, và chịu ràng buộc $g(M)=0$.
  - Nếu $\Delta>0$ thì M_0 là điểm đạt cực tiểu.
  - Nếu $\Delta<0$ thì M_0 là điểm đạt cực đại.
  - Nếu Δ đổi dấu thì M_0 không phải là điểm cực trị.

Ví dụ 21:

Tìm cực trị của hàm số $z=xy+2x$ với điều kiện $8x+4y=120$.

$$g(x,y)=8x+4y-120=0.$$

Xét hàm số:

$$\Phi(x,y)=xy+2x+\lambda(8x+4y-120).$$

Tìm các điểm dừng của hàm phụ thoả mãn:

$$\begin{cases}8x+4y-120=0\\ \Phi_x'=y+2+8\lambda=0\\ \Phi_y'=x+4\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8\\ y=14\\ \lambda=-2\end{cases}$$

Xét điểm $M(8+h,14+k)$ rất gần $M_0(8,14)$. Ta có:

$$\Delta=(8+h)(14+k)+2(8+h)-8.14-2.8=hk+16h+8k.$$

Giữa h, k có ràng buộc:

$$g(8+h,14+k)=8(8+h)+4(14+k)-120=0\Rightarrow k=-2h.$$

Thay vào biểu thức của Δ, ta có:

$$\Delta=-2h^2<0,\forall h\neq 0\Leftrightarrow f(M)<f(M_0).$$

Vậy $M_0(8,14)$ là điểm cực đại của hàm số, $Z_{CĐ}=128$.

4.3.4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Hai bài toán cực trị đã xét ở trên là các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số mang tính chất địa phương chỉ là lớn hơn hoặc nhỏ hơn so với các điểm ở gần điểm đó.Tuy nhiên thực tế ta cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong toàn bộ miền xác định của hàm số cần xét. Sau đây đưa ra quy tắc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm nhiều biến số.

Ta đã biết một hàm số liên tục trên một miền bị chặn D có cả biên thì sẽ đạt được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên miền đó. Nếu f đạt được GTLN (GTNN) trong miền D thì điểm đó có thể là điểm cực trị. Ngoài ra f có thể đạt được GTLN, GTNN trên biên của miền D, lúc này ta có thêm ràng buộc đó là phương trình biên của D. Do đó

- Bước 1: Tìm các điểm tới hạn của hàm số ở trong miền D.
- Bước 2: Tính toán và so sánh giá trị của hàm số tại những điểm tới hạn đó, và so sánh với các giá trị của hàm số tại các giá trị trên biên từ đó kết luận.

Ví dụ 22*:*

a) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

Tìm điểm tới hạn: $\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 8 \quad\quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6. \end{cases}$

Điểm $(-4,6)$ không thuộc miền đang xét.

Trên biên $x = 0$, $0 \le y \le 2$, suy ra $0 \le z = 8y \le 16$.

Trên biên $x = 1$, $0 \le y \le 2$, suy ra $-3 \le z = 10y - 3 \le 17$.

Trên biên $y = 0$, $0 \le x \le 1; -3 \le z = x^2 - 4x \le 0$.

Trên biên $y = 2$, $0 \le x \le 1; 16 \le z = x^2 + 16 \le 17$.

Từ đây ta thấy giá trị lớn nhất $z_{max} = z(1,2) = 17$; giá trị nhỏ nhất $z_{min} = z(1,0) = -3$.

b) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = x^2 - y^2$, trong miền tròn $x^2 + y^2 \le 4$.

Tìm điểm tới hạn trong miền:

$$2x = -2y = 0\text{, suy ra } x = y = 0, z(0,0) = 0.$$

Trên biên: $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le y^2 \le 4$, ta có $-4 \le z = 4 - 2y^2 \le 4$

Suy ra giá trị lớn nhất $z_{max} = 4$ tại điểm $(\pm 2; 0)$; giá trị nhỏ nhất $z_{min} = -4$. tại điểm $(0; \pm 2)$.

4.3.5. Ứng dụng trong kinh tế: Bài toán tối đa hoá lợi nhuận

Các kết quả trên đây là cơ sở cho việc giải các bài toán tối ưu hoá. Bài toán tối ưu đặt ra là tối đa hoá hoặc tối thiểu hoá giá trị của hàm mục tiêu:

$$w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

trong đó các biến độc lập $x_i; 1 \le i \le n$ phản ánh các nhân tố đầu vào.

Một trong những tiền đề của kinh tế học thị trường là: Các nhà sản xuất theo đuổi mục tiêu tối đa hoá lợi nhuận. Ta xét bài toán kinh tế sau đây:

Giả sử một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm và gọi Q_1, Q_2 lần lượt là số lượng của sản phẩm thứ nhất và thứ hai. Tổng chi phí để sản xuất ra số lượng sản phẩm đó là:

$$TC = TC(Q_1, Q_2).$$

Do tính chất cạnh tranh, doanh nghiệp phải chấp nhận giá thị trường của các sản phẩm đó. Gọi p_1, p_2 là giá thị trường của hai loại sản phẩm, khi đó hàm lợi nhuận sẽ là:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2).$$

Bài toán đặt ra là hãy chọn cơ cấu sản phẩm (Q_1, Q_2) để hàm lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất. Đây chính là bài toán cực trị của hàm hai biến số.

Ví dụ 22:

Giả sử hàm tổng chi phí của doanh nghiệp đó là:

$$TC = 6Q_1^2 + 3Q_2^2 + 4Q_1Q_2$$

và giá trị của hai sản phẩm trên thị trường là $p_1 = 60; p_2 = 34$.

Hàm lợi nhuận là:

$$\pi = 60Q_1 + 34Q_2 - 6Q_1^2 - 3Q_2^2 - 4Q_1Q_2.$$

Giá trị có thể đạt lợi nhuận tối đa là điểm dừng của hàm lợi nhuận:

$$\begin{cases} \pi_{Q_1}' = 60 - 12Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ \pi_{Q_2}' = 34 - 4Q_1 - 6Q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 4 \\ Q_2 = 3. \end{cases}$$

Tính các giá trị đạo hàm bậc hai:

$$r = -12; s = -4; t = -6$$

suy ra $\Delta < 0, r < 0$ do đó hàm lợi nhuận đạt cực đại với cặp giá trị $(Q_1, Q_2) = (4, 3)$.

Vậy doanh nghiệp đó nên sản xuất 4 đơn vị sản phẩm thứ nhất và 3 đơn vị sản phẩm thứ hai.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài này chúng ta đã nghiên cứu những vấn đề sau:

- Hàm nhiều biến số. Khái niệm liên tục của hàm nhiều biến số.
- Đạo hàm riêng. Vi phân riêng.
- Cực trị của hàm số.
- Cực trị có điều kiện của hàm số.

Bài này trình bày những khái niệm và kết quả cơ bản về phép tính vi phân của hàm số nhiều biến số: Định nghĩa hàm số nhiều biến số, miền xác định, cách biểu diễn hình học, giới hạn và tính liên tục của hàm số nhiều biến số, đạo hàm riêng và vi phân toàn phần, đạo hàm cấp cao, đạo hàm theo hướng, cực trị của hàm số nhiều biến và ứng dụng của phép tính vi phân vào hình học. Khi học, học viên cần lưu ý đến sự khác biệt giữa hàm số một biến số và hàm số nhiều biến số.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nêu cách tính đạo hàm riêng theo từng biến của hàm số hai biến $z = f(x,y)$.

2. Định nghĩa cực trị và cực trị có điều kiện của hàm số hai biến. Cực trị không điều kiện khác với giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một miền như thế nào?

BÀI TẬP

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau đây

a) $z = \ln(xy - 1)$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} - \ln(x + y^2)$

c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

d) $z = \sqrt{x \ln y}$.

2. Tính đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của các hàm số sau đây

a) $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$

b) $z = e^{x-2y}$

c) $z = (x + y^2)2^x$.

3. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn $y = y(x)$ xác định từ các phương trình sau

a) $\text{arctg}\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$

b) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$

c) $2y - \sin y = 2x$.

4. Tìm cực trị của các hàm số sau đây

a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

b) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

c) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

5. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số sau đây

a) $z = xy$ nếu $x + y = 1$.

b) $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ nếu $4x^2 + y^2 = 25$.