Chương 1: Chuỗi Fourier

1.1 Hàm tuần hoàn.

1.2 Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn.

1.3 Công thức lặp tính hệ số chuỗi Fourier.

1.4 Tính đối xứng của hàm.

1.5 Khai triển bán kỳ.

1.6 A numerical method.

1.7 Các dạng khác của chuỗi Fourier.

1.8 Ứng dụng của chuỗi Fourier.

1.1 Hàm tuần hoàn

- **Định nghĩa 1.1:**

Hàm f(t) tuần hoàn, chu kỳ T, tần số cơ bản $\omega_0 = 2\pi/T$ nếu thỏa:

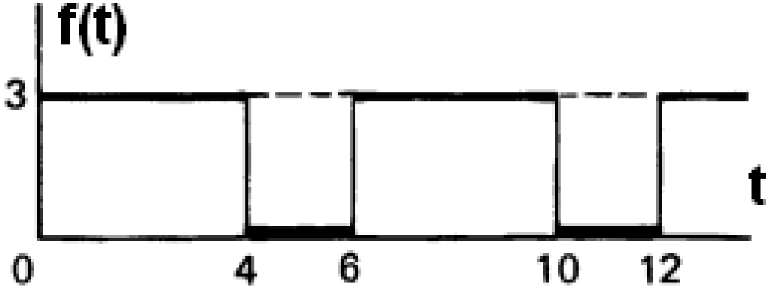
$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \qquad (1.1)$$

- **Phân loại:** **tuần hoàn sin và tuần hoàn không sin.**

- **Xác định chu kỳ T:** **nguyên lý zero-cross + giao điểm tín hiệu và trục hoành.**

- **Mô tả hàm tuần hoàn:** **Cho biết chu kỳ và hàm toán học mô tả tín hiệu tuần hoàn trong một chu kỳ .**

❖Mô tả toán học cho tín hiệu tuần hoàn:



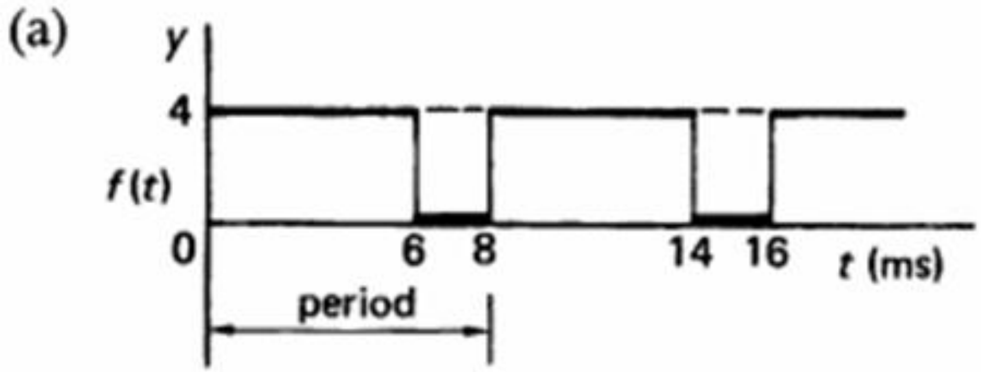
a) Giữa t = 0 và t = 4: f(t) = 3, tức là f(t) = 3   0 < t < 4 .

b) Giữa t = 4 và t = 6: f(t) = 0, tức là f(t) = 0   4 < t < 6 .

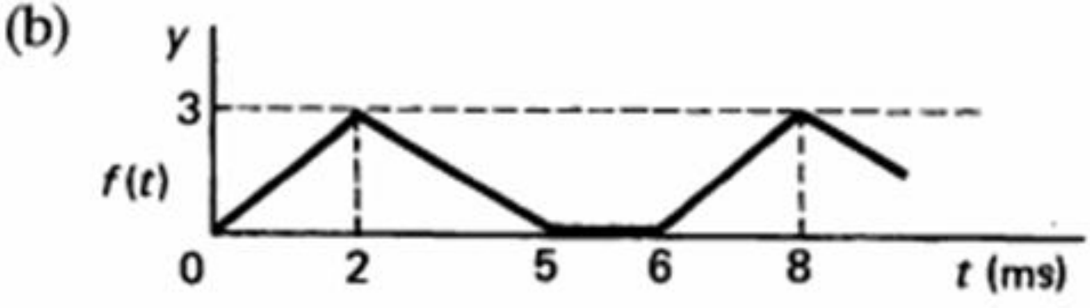
⇨ Nên ta có thể định nghĩa hàm:

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t < 4 \\ 0 & 4 < t < 6 \end{cases} \\ f(t) = f(t+6) \end{cases}$$

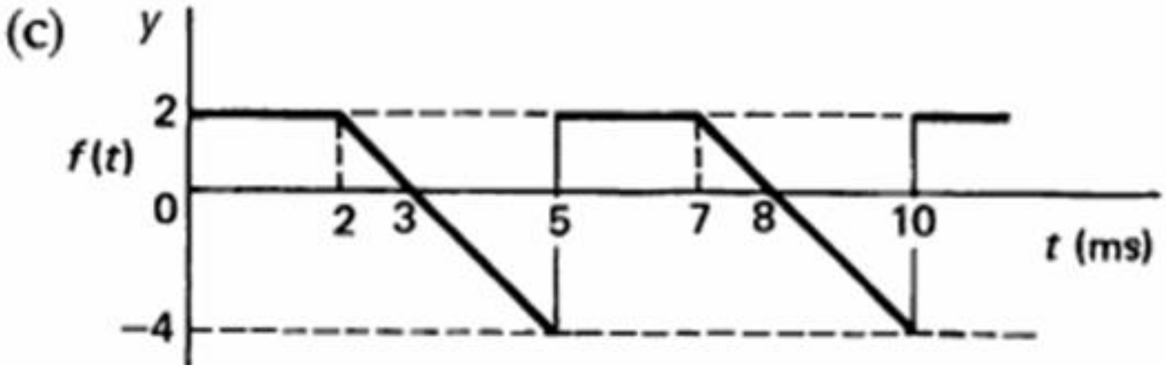
❖VD1.1.1: Tìm chu kỳ T của tín hiệu tuần hoàn



period = 8 ms



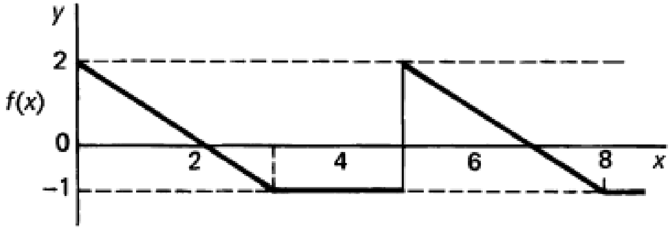
period = 6 ms



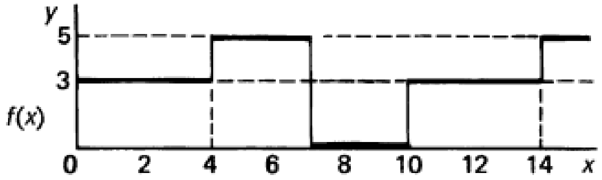
period = 5 ms

❖VD1.1.2: Mô tả toán học cho tín hiệu ?

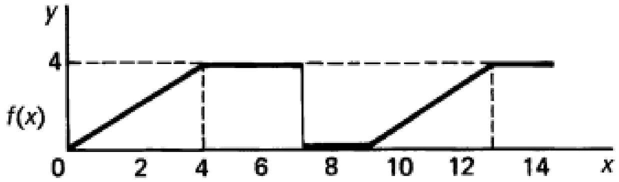
1



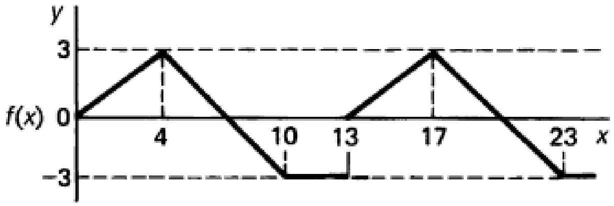
2



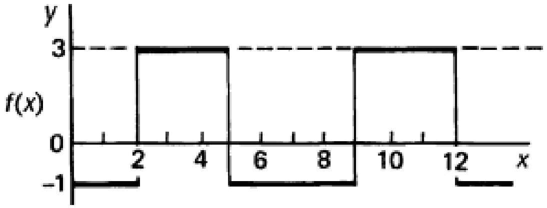
3



4



5



Here are the details.

1

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 3 \\ -1 & 3 < x < 5 \end{cases}$$

$$f(x+5) = f(x).$$

2

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 4 \\ 5 & 4 < x < 7 \\ 0 & 7 < x < 10 \end{cases}$$

$$f(x+10) = f(x).$$

3

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 4 & 4 < x < 7 \\ 0 & 7 < x < 9 \end{cases}$$

$$f(x+9) = f(x).$$

4

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{4} & 0 < x < 4 \\ 7 - x & 4 < x < 10 \\ -3 & 10 < x < 13 \end{cases}$$

$$f(x+13) = f(x).$$

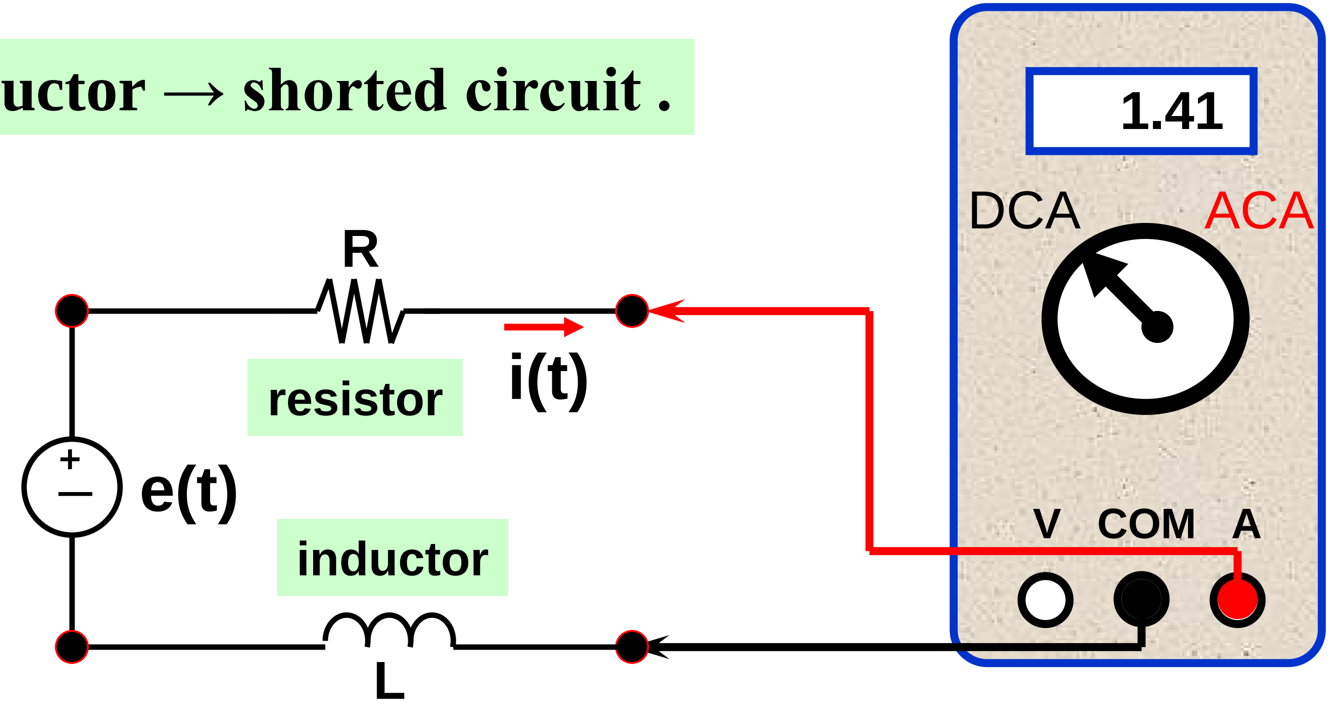
5

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < 2 \\ 3 & 2 < x < 5 \\ -1 & 5 < x < 7 \end{cases}$$

$$f(x+7) = f(x).$$

❖Tại sao phải học chuỗi Fourier ?

- **DC analysis: Inductor → shorted circuit .**



- **AC analysis:**

Fresnel formula

- **Periodic signal analysis: using Fourier Series**

1.2 Chuỗi Fourier của một hàm tuần hoàn

❖ **Chuỗi Fourier của một hàm tuần hoàn f(t), chu kỳ T là:**

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right] \qquad \textbf{(1.2)}$$

Vôùi : $n = 1,2 \ldots$

$\omega_0 = 2\pi/T$ = taàn soá cô baûn

a_0, a_n , b_n = caùc heä soá khai trieån chuỖi Fourier .

❖Điều kiện tồn tại:

- **Định nghĩa 1.2:**

Một hàm f(t) có thể khai triển dưới dạng chuỗi Fourier nếu nó thỏa điều kiện Dirichlet phát biểu như sau:

i. **Bị chặn trong một chu kỳ:** $\int_{t_0}^{t_0+T} |\mathrm{f(t)}|\,dt < \infty$

ii. **Có số điểm cực đại và cực tiểu trong 1 chu kỳ là hữu hạn.**

iii. **Có số điểm gián đoạn trong 1 chu kỳ là hữu hạn.**

❖Tính chất hội tụ:

- **Định lý 1.1:** **(Định lý Dirichlet)**

Nếu hàm f(t) tuần hoàn chu kỳ T và thỏa điều kiện Dirichlet thì chuỗi Fourier của f(t) sẽ hội tụ về :

- **f(t) nếu f liên tục tại t.**
- **$\frac{1}{2}[f(t_k^+) + f(t_k^-)]$ nếu f gián đoạn tại t.**

❖Các hệ số chuỗi Fourier:

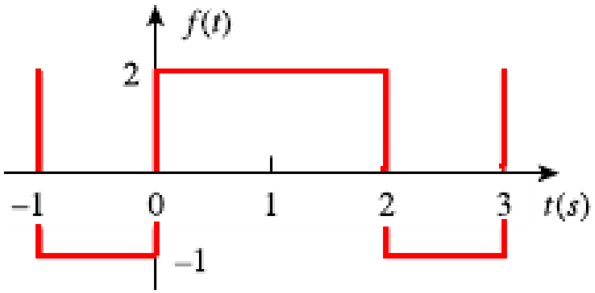
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad (1.3)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad (1.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \qquad (1.5)$$

❖VD1.2.1: Tìm chuỗi Fourier

a) Xác định chuỗi Fourier ?
b) Kiểm lại dùng MATLAB ?



Giải

❖**Chu kỳ và tần số cơ bản:** $T = 3, \quad \omega_o = 2\pi / T = 2\pi / 3$

❖**Các hệ số chuỗi Fourier: $a_0 = 2$,**

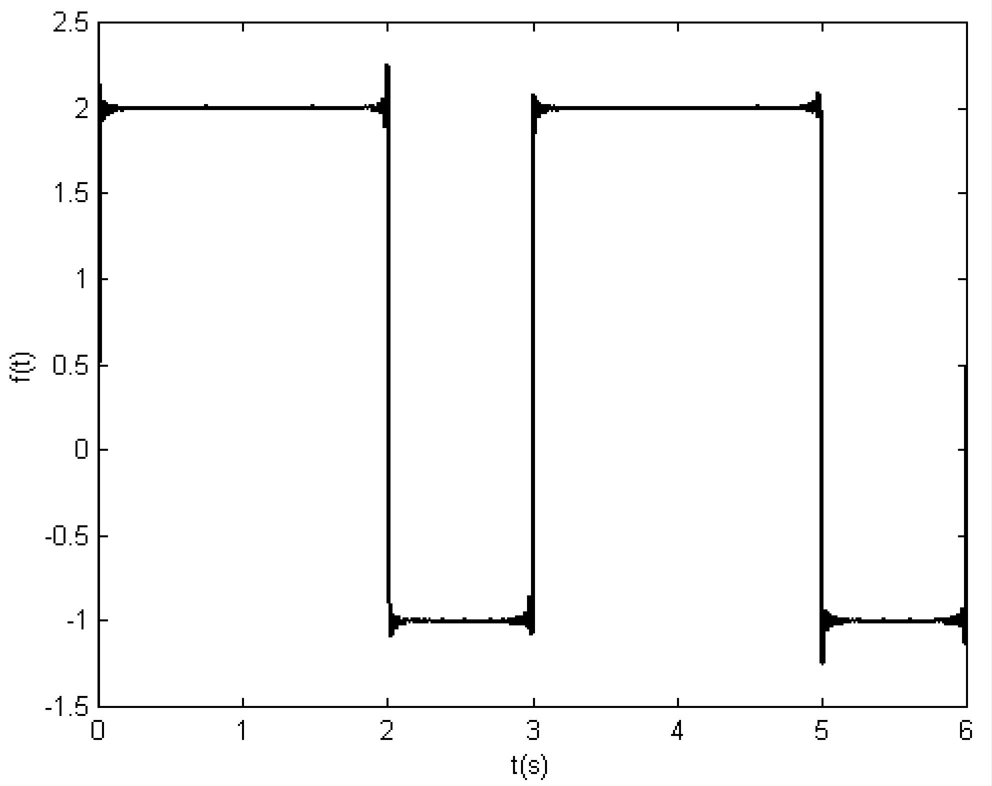
$$a_n = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} \qquad b_n = \frac{3}{n\pi}\left(1-\cos\frac{4n\pi}{3}\right)$$

⇒

$$f(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi t}{3} + \frac{3}{n\pi}\left(1-\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\sin\frac{2n\pi t}{3}\right]$$

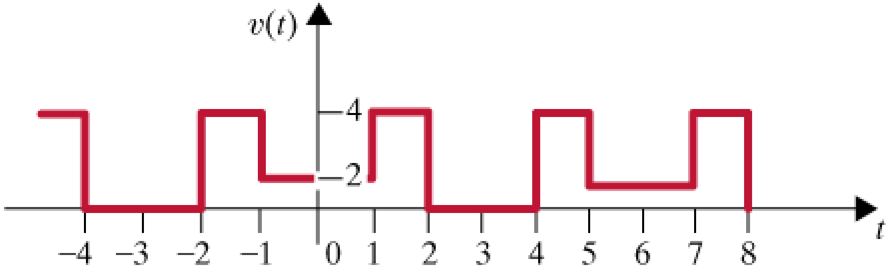
❖VD1.2.1: Kiểm lại dùng MATLAB

```
pi = 3.14159; N = 100; T = 3; a0 = 1;
w0 = 2*pi/T;
t = linspace(0,2*T,600);
for n=1:N
   a(n)= (3/(n*pi))*sin(4*n*pi/3);
   b(n)= (3/(n*pi))*(1 - cos(4*n*pi/3));
end
for i=1:length(t)
   f(i) = a0;
   for n=1:length(a)
      f(i) = f(i) + a(n)*cos(n*w0*t(i)) +
                    b(n)*sin(n*w0*t(i));
   end
end
plot(t,f,'black');
xlabel('t(s)');
ylabel('f(t)');
```



1.3 Tính đối xứng của hàm:

a) Haøm chaün f(t) = f(-t) : Tín hieäu nhaän truïc tung laøm truïc ñoái xöùng.



$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

(1.6a)

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

(1.6b)

$$b_n = 0$$

(1.6c)

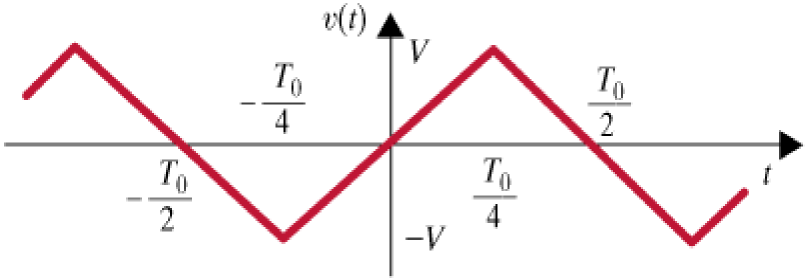
❖**<u>Định lý 1.7:</u>** **Nếu f là hàm tuần hoàn chẵn, thỏa điều kiện Dirichlet thì chuỗi Fourier của nó có dạng:**

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

(1.6d)

b) Hàm lẻ :

Haøm leû f(t) = - f(-t) : Tín hieäu nhaän goác toïa ñoä laøm taâm ñoái xöùng.



$$a_0 = 0$$

(1.7a)

$$a_n = 0$$

(1.7b)

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

(1.7c)

❖**Định lý 1.8:** **Nếu f là hàm tuần hoàn lẻ, thỏa điều kiện Dirichlet thì chuỗi Fourier của nó có dạng:**

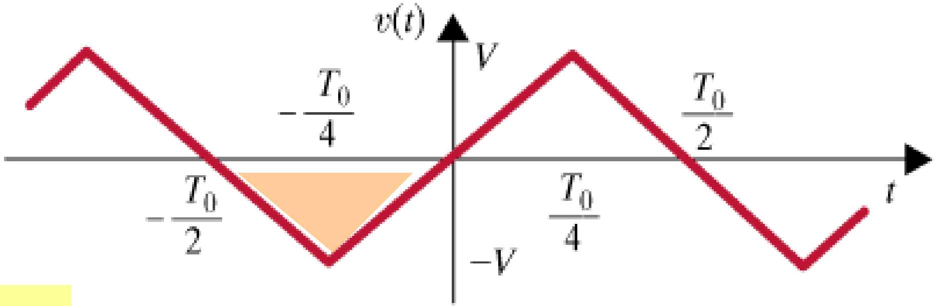
$$\mathrm{f(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n \sin(n\omega_0 t)}$$

(1.7d)

c) Hàm đối xứng nửa sóng:

- Haøm ñoái xöùng nöûa soùng :

  f(t) = - f(t ± T/2) :

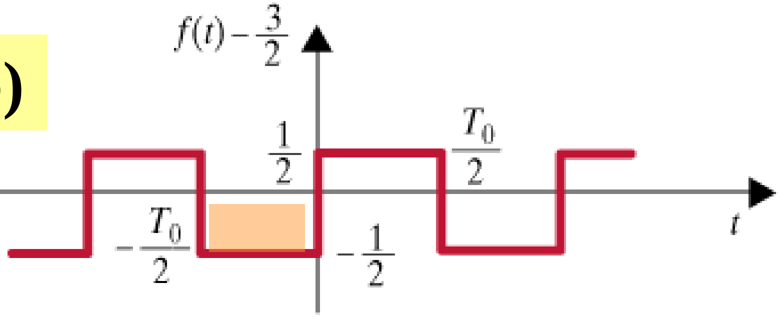


(a)

✓ TP DC : $\boxed{a_0 = 0}$ **(1.11a)**

✓ Khi n chaün : $\boxed{a_n = b_n = 0}$ **(1.11b)**

✓ Khi leû :



(c)

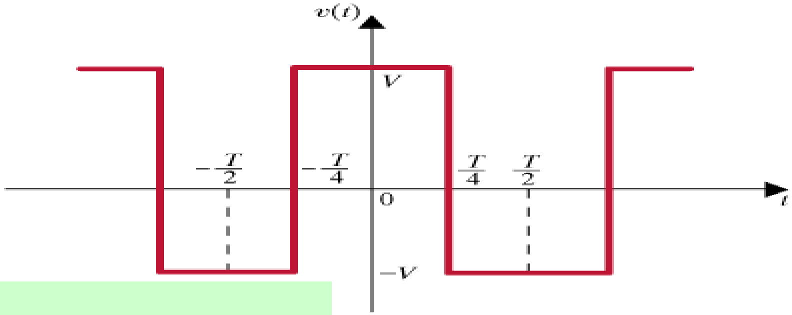
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad \textbf{(1.11c)}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad \textbf{(1.11d)}$$

Examples of signals with half-wave symmetry

d) Đối xứng nửa sóng và chẵn (Quarter-wave):

$$\text{even} \Rightarrow b_n = 0,\ n = 1,2,\dots$$



$$\text{half - wave symmetry} \Rightarrow a_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \qquad \text{for n odd}$$

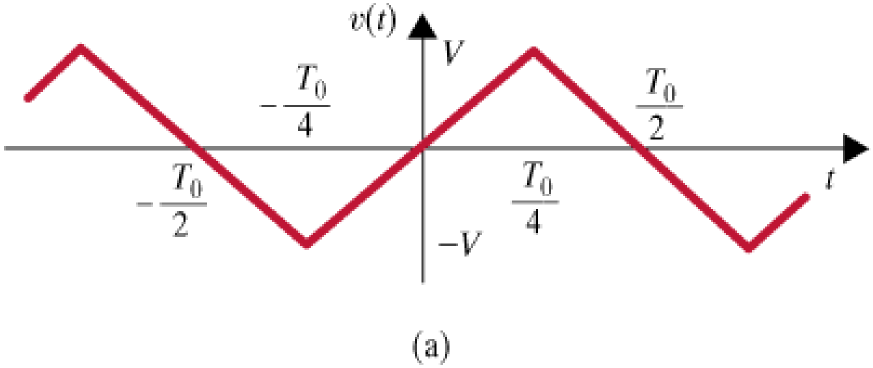
$$a_n = 0 \quad \text{for n even}$$

$$a_{2k+1} = \frac{4}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} V\cos(2k+1)\omega_0 t\,dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} V\cos(2k+1)\omega_0 t\,dt\right] = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} V\cos(2k+1)\omega_0 t\,dt$$

$$\boxed{a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad \text{(n:odd)}}$$

(1.12)

e) Đối xứng nửa sóng và lẻ (Quarter-wave):



$$\text{odd} \Rightarrow \ a_n = 0; \ n = 0,1,2,\ldots$$

$$\text{half-wave symmetry} \Rightarrow b_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \qquad \text{for n odd}$$

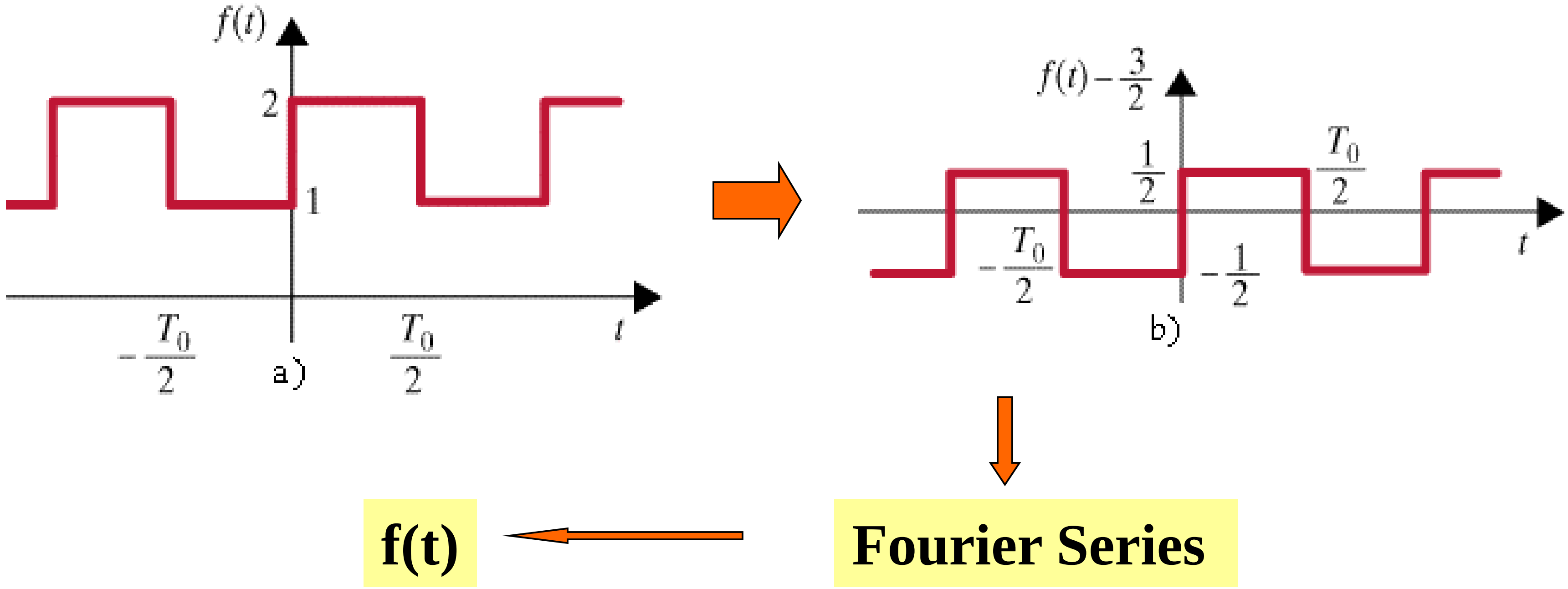
$$b_n = 0 \quad \text{for n odd}$$

$$\boxed{b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad \text{(n:odd)}}$$

(1.13)

f) Khi hàm không có tính đối xứng:

f$_1$) Thay đổi thành phần DC:

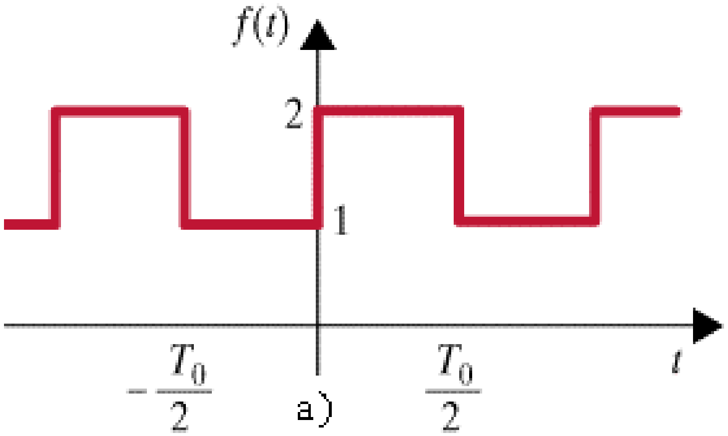


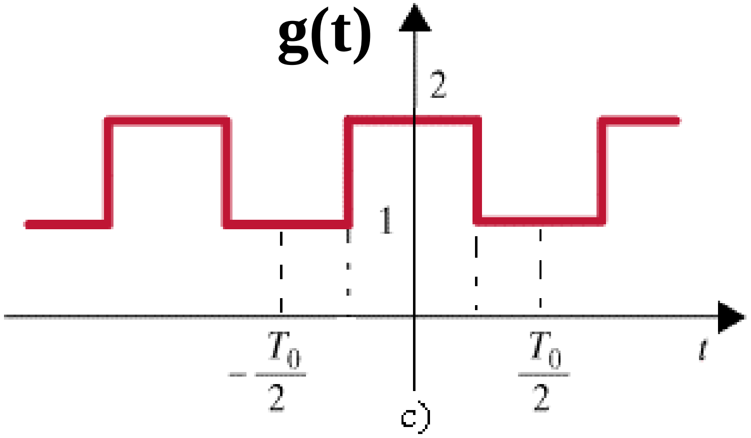
Fourier Series

f(t)

f) Khi hàm không có tính đối xứng :

f_2) Dịch theo t:





$f(t) = g(t – T_0/4)$

Fourier Series of g(t)

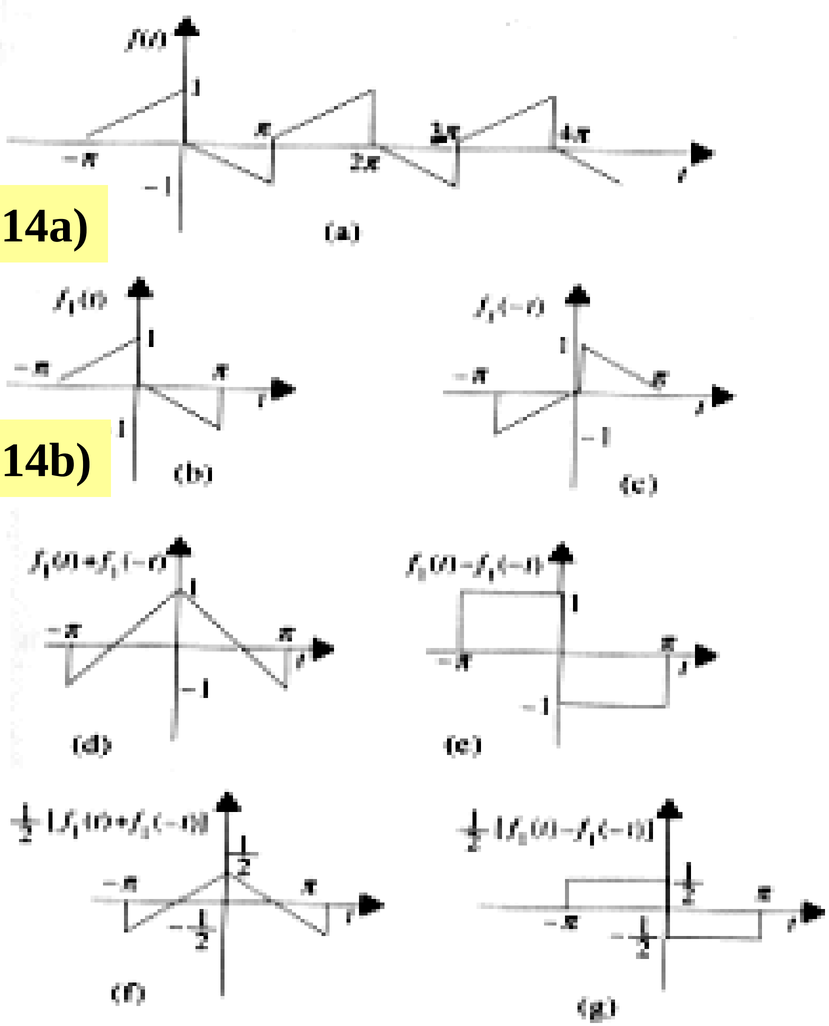
f) Khi hàm không có tính đối xứng :

f_3) Phân tích thành phần chẵn - lẻ :

$$f_e(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$$ (1.14a)

$$f_o(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$ (1.14b)

[*Haøm f(-t) xaùc ñònh baèng ñoà thò*]



- Vaø ta coù :

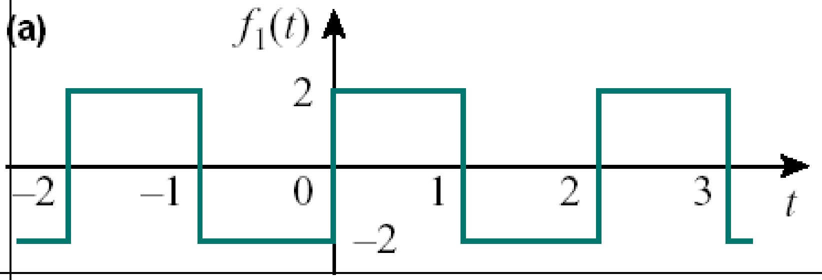
$a_0 = a_{0e}$ (1.14c)

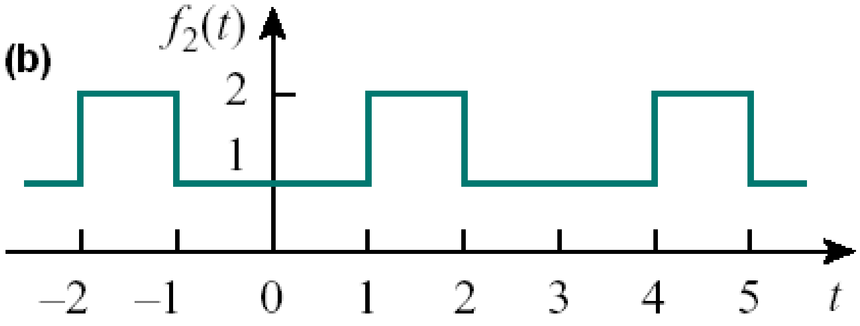
$a_n = a_{ne}$ (1.14d)

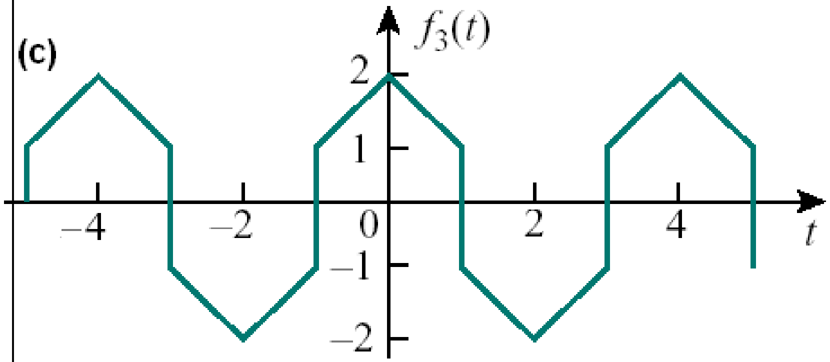
$b_n = b_{no}$ (1.14e)

❖Ví duï1.3.1: Xaùc ñònh tính đối xứng ?

Determine the fundamental frequency and specify the type of symmetry.



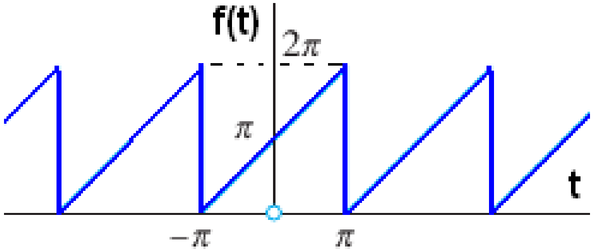




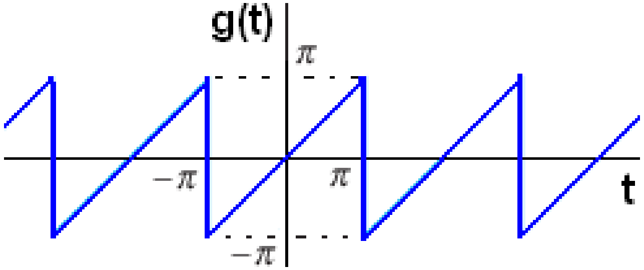
(a) π, odd and half-wave symmetric (b) $2\pi/3$, even,
(c) $\pi/2$, even and half-wave symmetric

❖VD1.3.2: Chuổi Fourier cho tín hiệu đối xứng

Cho hàm f(t) định nghĩa bởi : $f(t) = t + \pi$ $(-\pi < t < \pi)$ và $f(t) = f(t + 2\pi)$. Xác định chuổi Fourier biểu diễn cho f(t) ?



Giải



- Ta biểu diễn f(t) theo g(t):

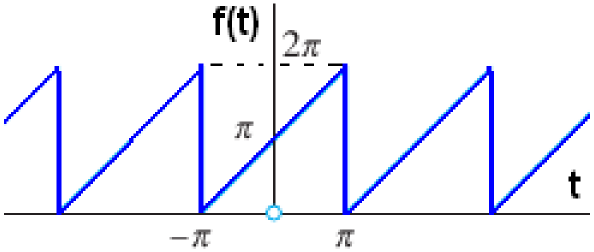
$$f(t) = \pi + g(t)$$

- g(t) là tín hiệu đối xứng lẻ nên có chuổi Fourier:

$$T = 2\pi;\ \ \omega_0 = 1;\ g(t) = t\ \ (0 < t < \pi)$$

❖VD1.3.2: Chuổi Fourier cho tín hiệu đối xứng

Cho hàm f(t) định nghĩa bởi : $f(t) = t + \pi$ $(-\pi < t < \pi)$ và $f(t) = f(t + 2\pi)$. Xác định chuổi Fourier biểu diễn cho f(t) ?



Giải

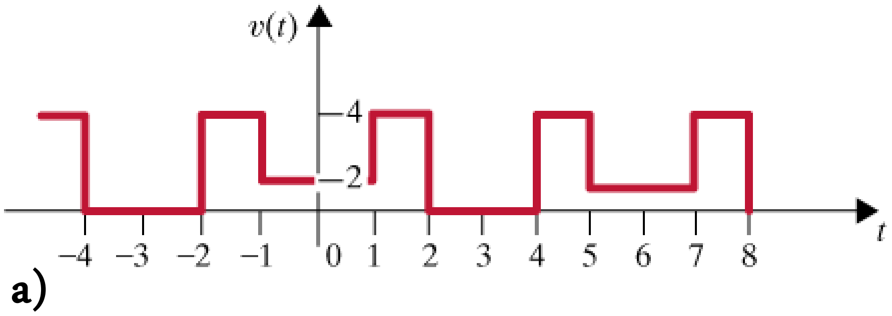
$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{\sin(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)^2}\Bigg|_0^{\pi}\right] = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$$

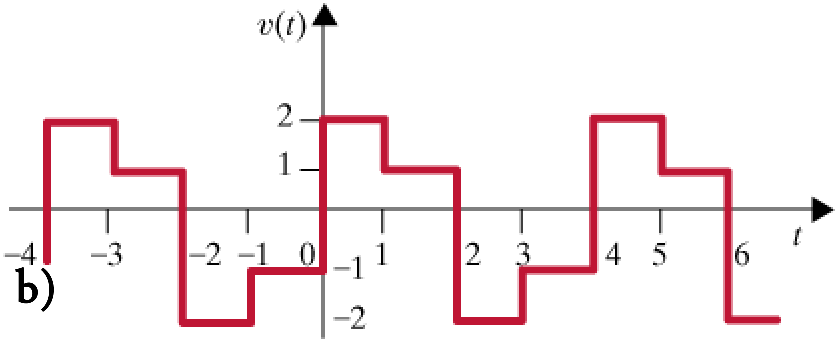
- **Chuổi Fourier của g(t):** $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$

- **Chuổi Fourier của f(t):** $f(t) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos(n\pi)}{n}\sin(nt)$

❖Ví duï1.3.3: Xaùc ñònh chuoãi Fourier

Determine the trigonometric Fourier series expansion





$T_0 = 6 \quad \omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$a_0 = \frac{1}{3} \times (2+4) = 2$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^1 2\cos n\omega_0 t\,dt + \frac{2}{3}\int_1^2 4\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$a_n = \frac{4}{n\pi}\left(2\sin\frac{2\pi n}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

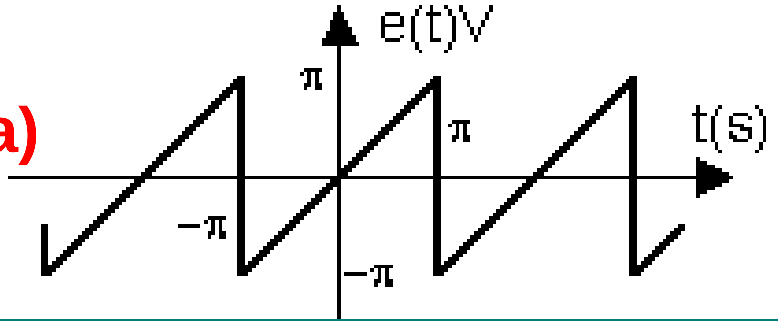
$T_0 = 4 \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$b_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)\pi}\left(2 - \cos(2k+1)\pi\right)$$

❖Ví duï1.3.4: Xaùc ñònh chuoãi Fourier

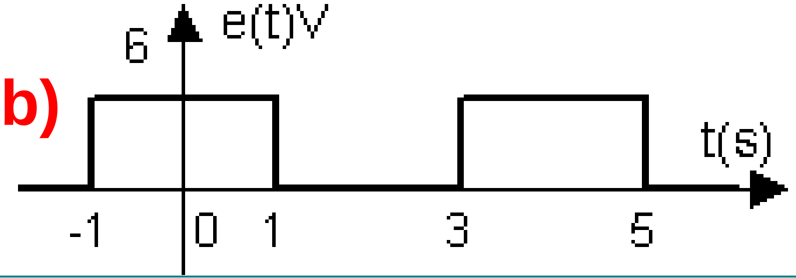
3a)



$$a_0 = 0 \;\; ; \; a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{n}$$

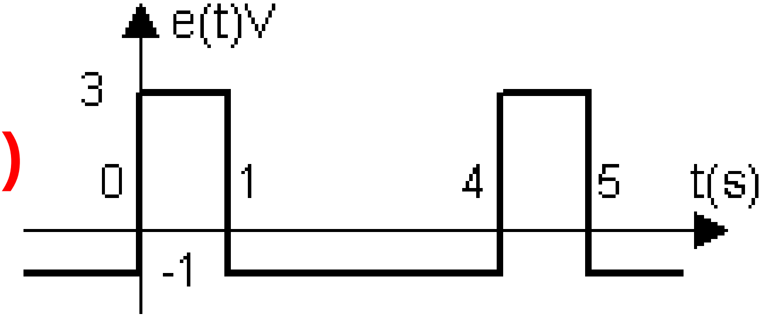
3b)



$$a_0 = 3 \;\; ; \; a_n = \frac{12}{n\pi}\sin(n\pi/2)$$

$$b_n = 0$$

3c)

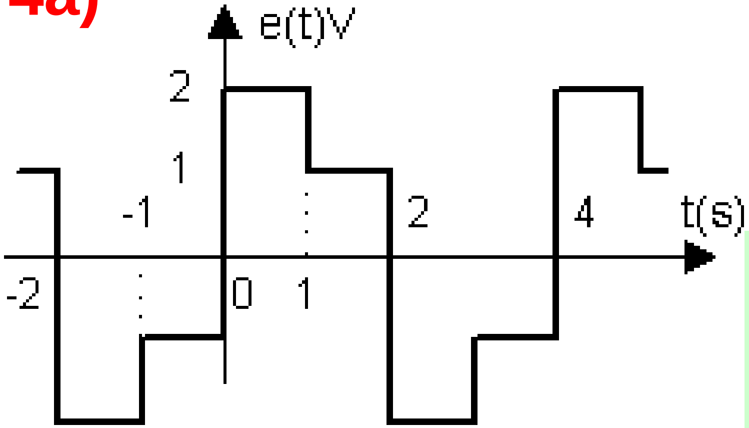


$$a_0 = 0 \;\; ; \; a_n = \frac{4}{n\pi}\sin(n\pi/2)$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}(1- \cos(n\pi/2))$$

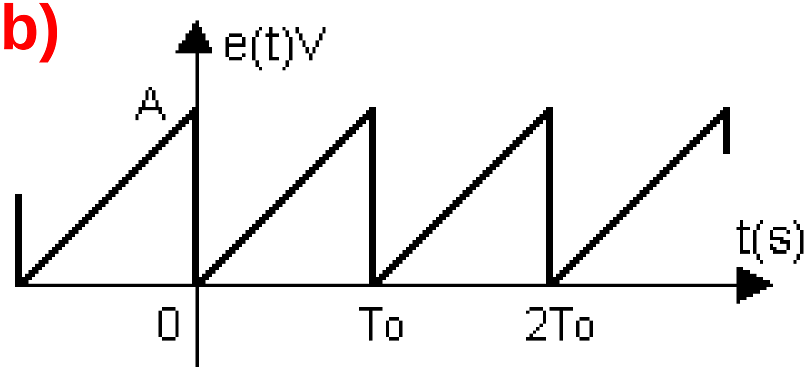
❖Ví duï1.3.5: Xaùc ñònh chuoãi Fourier

4a)



$$e(t)=\sum_{n=1,odd}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})\right)\cos(\frac{n\pi}{2}t)+\left(\frac{6}{n\pi}\right)\sin(\frac{n\pi}{2}t)\right]$$

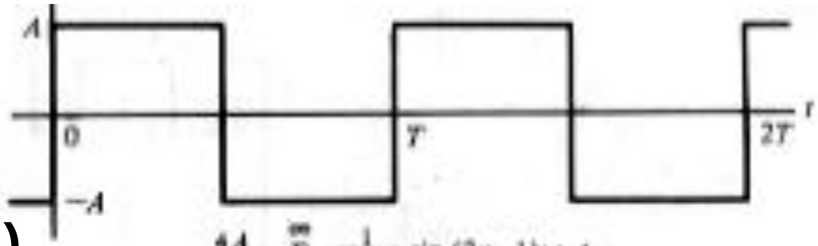
4b)



$$e(t)=\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-A}{n\pi}\sin(n\omega_0 t)$$

❖Ví duï1.3.6: Xaùc ñònh chuoãi Fourier

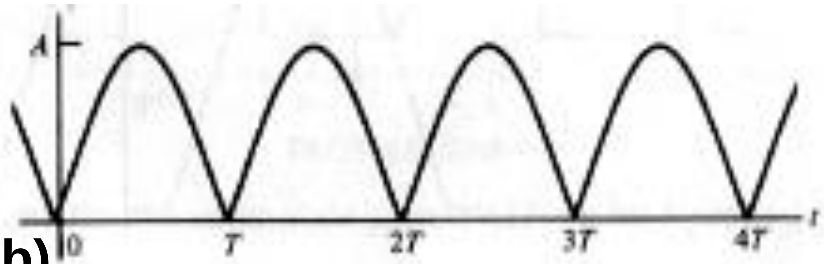
a)



$$\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\omega_0 t$$

(a) Square wave

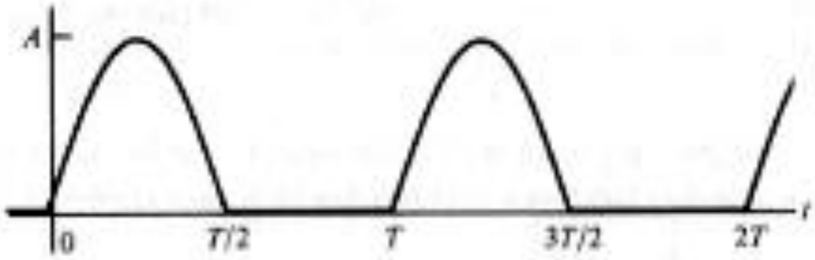
b)



$$\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos n\omega_0 t$$

(c) Full-wave rectified sine

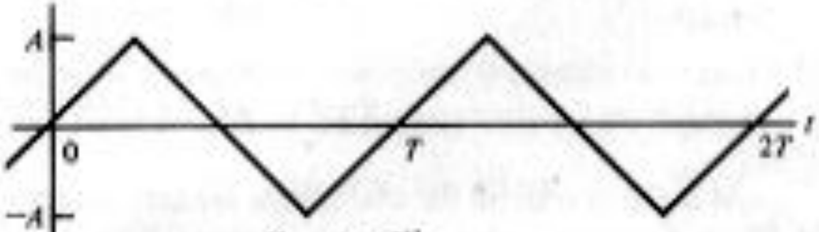
c)



$$\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin\omega_0 t-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2n\omega_0 t$$

(b) Half-wave rectified sine

d)



$$\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\omega_0 t$$

(d) Triangular wave

1.4 Khai triển bán kỳ

- **Mục đích:** Biểu diễn một hàm dưới dạng chuỗi Fourier.

- **Định lý 1.9:**

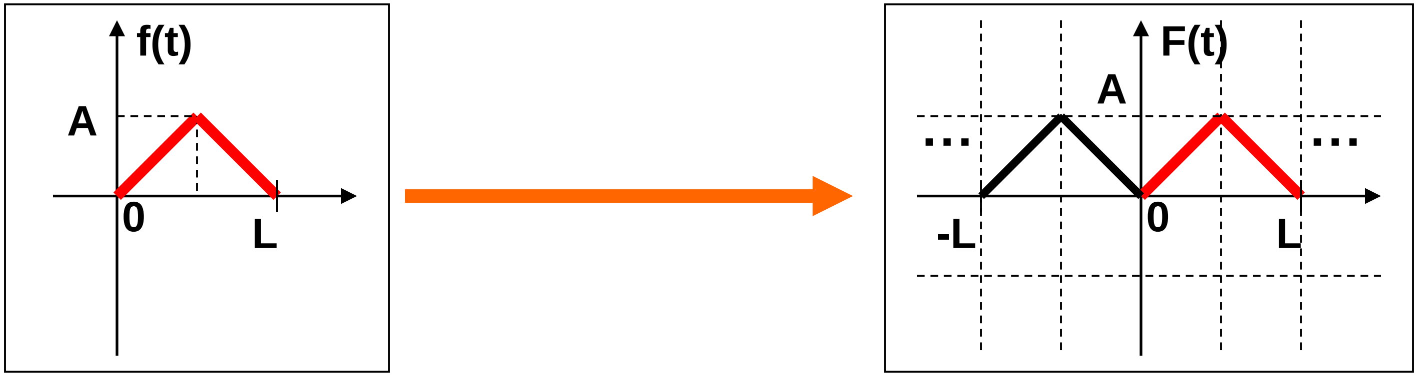
Nếu f(t) là hàm chỉ xác định trên khoảng kín [0, L] và thỏa điều kiện Dirichlet thì nó có thể được khai triển thành chuỗi Fourier côsin hoặc thành chuỗi Fourier sin.

- **Cả hai chuỗi gọi chung là khai triển bán kỳ của hàm f(t) trên khoảng kín [0, L] .**

a) Các bước tìm chuỗi Fourier côsin:

i. Xây dựng hàm tuần hoàn F(t):

$$F(t)=\begin{cases} f(-t) & (-L<t<0)\\ f(t) & (0<t<L)\\ F(t)=F(t+2L) & \end{cases}$$



ii. Xác định các hệ số:

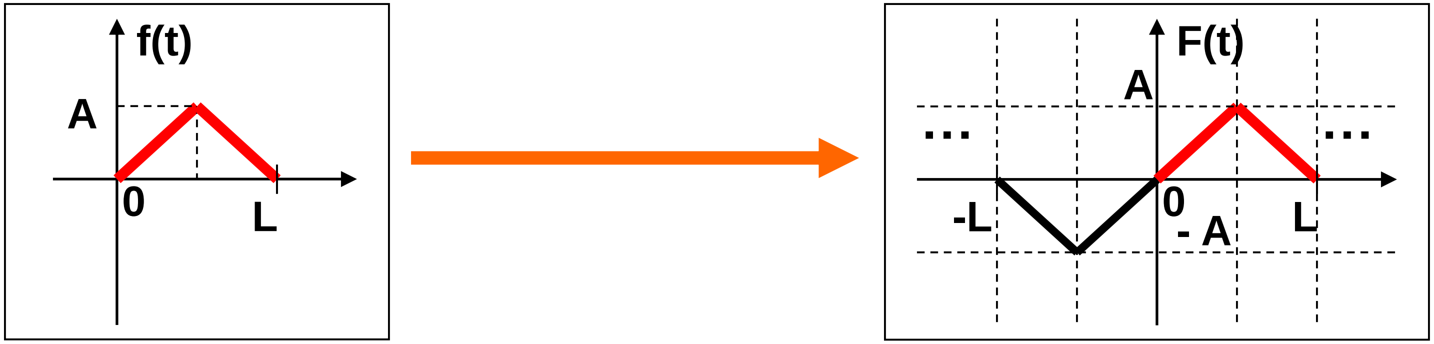
$$\boxed{a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)dt}\quad \boxed{\omega_0=\pi/L}\quad \boxed{a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(n\omega_0 t)dt}$$

iii. Viết chuỗi Fourier.

b) Các bước tìm chuỗi Fourier sin:

i. Xây dựng hàm tuần hoàn F(t):

$$F(t)=\begin{cases}-f(-t) & (-L<t<0)\\ f(t) & (0<t<L)\\ F(t)=F(t+2L) & \end{cases}$$



ii. Xác định các hệ số:

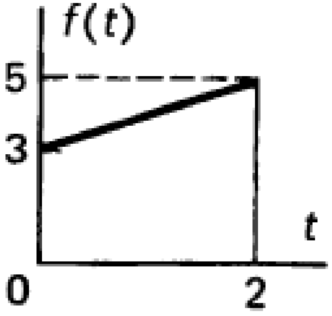
$$\boxed{\omega_0=\pi/L}$$

$$\boxed{b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(n\omega_0 t)dt}$$

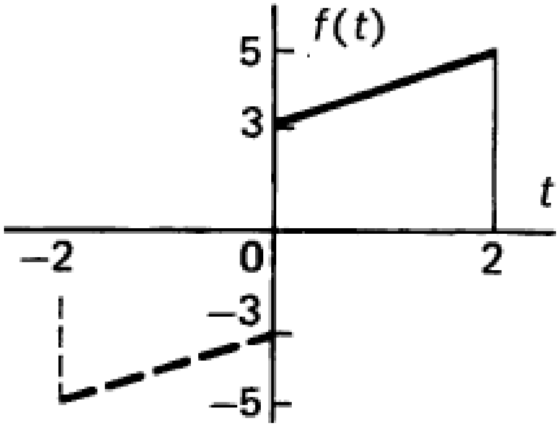
iii. Viết chuỗi Fourier.

❖VD1.4.1: Khai triển bán kỳ

Cho hàm f(t) định nghĩa bởi : f(t) = t + 3 (0 < t < 2). Xác định chuỗi Fourier sin biểu diễn cho f(t) ?



Giải



- **Thiết lập hàm lẻ và xác định:**

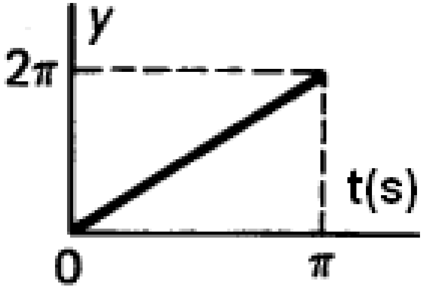
$$b_n = \frac{2}{n\pi}(3-5\cos n\pi)$$

- **Do đó chuỗi Fourier sin:**

$$f(t) = \frac{16}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t) - \frac{2}{\pi}\sin(2\frac{\pi}{2}t) + \frac{16}{3\pi}\sin(3\frac{\pi}{2}t) - \frac{1}{\pi}\sin(4\frac{\pi}{2}t)...$$

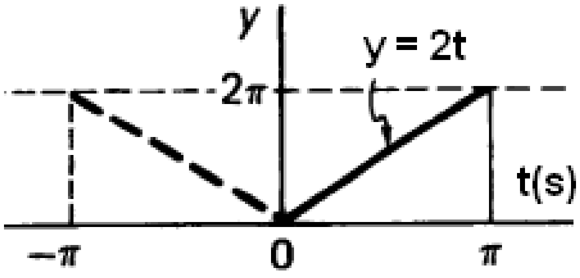
❖VD1.4.2: Khai triển bán kỳ

A function f(t) defined by : f(t) = 2t , 0 < t < π . Obtain a cosine series to present the function ?



- **We need an even function.**

$$a_0/2 = \pi \qquad a_n = -\frac{8}{n^2\pi} \quad (n{:}odd)$$



- **Therefore:**

$$f(t) = \pi - \frac{8}{\pi}\cos(t) - \frac{8}{9\pi}\cos(3t) - \frac{8}{25\pi}\cos(5t)\ldots$$

1.5 Công thức lặp tính hệ số chuỗi Fourier

1.5.1 Bước nhảy của một hàm:

- **Định nghĩa 1.3:**

Bước nhảy của một hàm f tại t_k là: $J_k = f(t_k^+) - f(t_k^-)$ **(1.6)**

1.5.2 Hai công thức lặp để tính hệ số chuỗi Fourier:

❖Định lý 1.2:

Nếu f là hàm tuần hoàn chu kỳ T, thỏa điều kiện Dirichlet và có m bước nhảy $J_1, J_2, \ldots, J_m$ tại m điểm gián đoạn $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ trong một khoảng chu kỳ nửa hở [a, a + T) thì:

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{n\omega_0} b_n' - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \sin(n\omega_0 t_k)} \qquad \textbf{(1.7)}$$

(n = 1, 2, …)

(b_n’ = hệ số chuỗi Fourier của hàm f’)

❖Định lý 1.3:

Nếu f là hàm tuần hoàn chu kỳ T, thỏa điều kiện Dirichlet và có m bước nhảy J_1, J_2, …, J_m tại m điểm gián đoạn $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ trong một khoảng chu kỳ nửa hở [a, a + T) thì:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n\omega_0} a'_n + \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \cos(n\omega_0 t_k)} \qquad \textbf{(1.8)}$$

(n = 1, 2, …)

(a_n’ = hệ số chuỗi Fourier của hàm f’)

❖ Các công thức lượng giác thường dùng:

- **Đổi tổng thành tích:**

$$\cos a + \cos b = 2\cos[(a+b)/2]\,.\,\cos[(a-b)/2]$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin[(a+b)/2]\,.\,\sin[(a-b)/2]$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin[(a+b)/2]\,.\,\cos[(a-b)/2]$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos[(a+b)/2]\,.\,\sin[(a-b)/2]$$

1.5.3 Tốc độ tiến về 0 của các hệ số chuỗi Fourier

❖ **Định lý 1.4:**

1. Khi n → ∞, các hệ số a_n và b_n trong chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn f thỏa điều kiện Dirichlet tiến đến 0 ít nhất cũng nhanh như c/n, với c = hằng số không phụ thuộc n.

2. Nếu trong 1), f gián đoạn trong [a, a + T) thì a_n hoặc b_n, và thường là cả hai, không thể → 0 nhanh hơn c/n.

3. Nếu f, f', …, $f^{(k)}$ thỏa điều kiện Dirichlet và liên tục khắp nơi thì a_n và b_n → 0 ít nhất cũng nhanh như c/n^{k+2}.

4. Nếu trong 3), f gián đoạn trong [a, a + T) thì a_n hoặc b_n, và thường là cả hai, không thể → 0 nhanh hơn c/n^{k+2}.

1.5.4 Đạo hàm và tích phân của chuỗi Fourier

- **Định lý 1.5:**

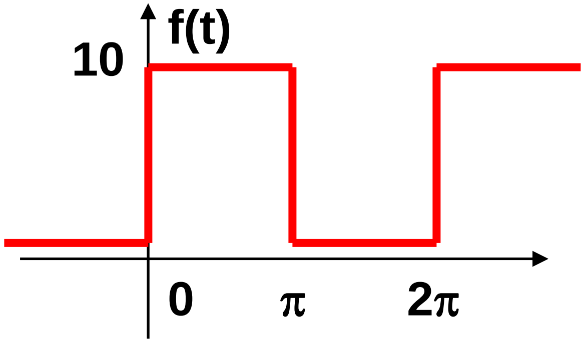
Tích phân của một hàm f thỏa điều kiện Dirichlet có thể tìm bằng cách lấy tích phân của từng số hạng chuỗi Fourier của nó.

- **Định lý 1.6:**

Cho một hàm f tuần hoàn thỏa điều kiện Dirichlet và liên tục khắp nơi; nếu f’ cũng thỏa điều kiện Dirichlet; và nếu f’(t) tồn tại thì nó có thể tìm bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi Fourier của hàm f.

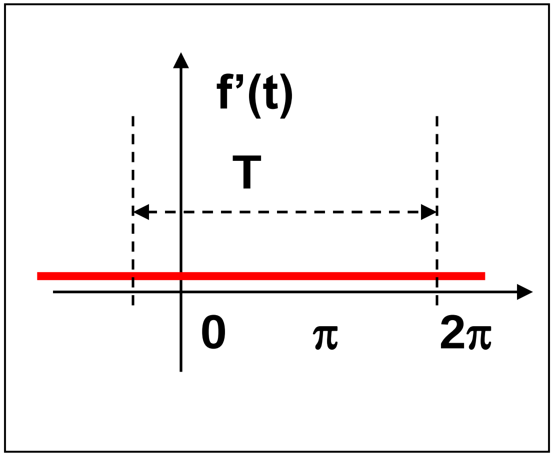
❖VD1.5.1: Tìm chuỗi Fourier = công thức lặp

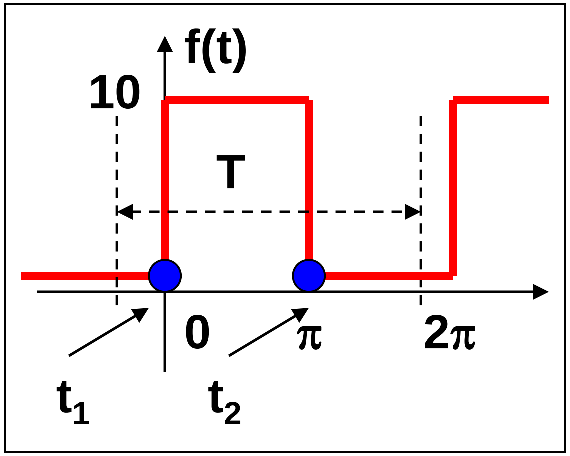
Xác định các hệ số chuỗi Fourier dùng công thức lặp ?



Giải

❖ Xác định f'(t), t_k và J_k:

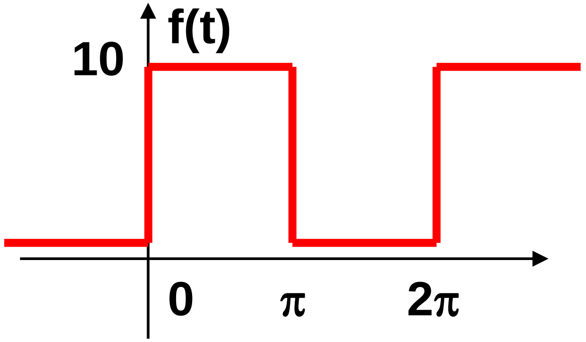




t_k	$t_1 = 0$	$t_2 = \pi$
J_k	10	– 10

❖VD1.5.1: Tìm chuỗi Fourier = công thức lặp

Xác định các hệ số chuỗi Fourier dùng công thức lặp ?



Giải

❖ Xác định các hệ số chuỗi Fourier:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 5$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}[10.\sin(0) - 10\sin(n\pi)] = 0$$

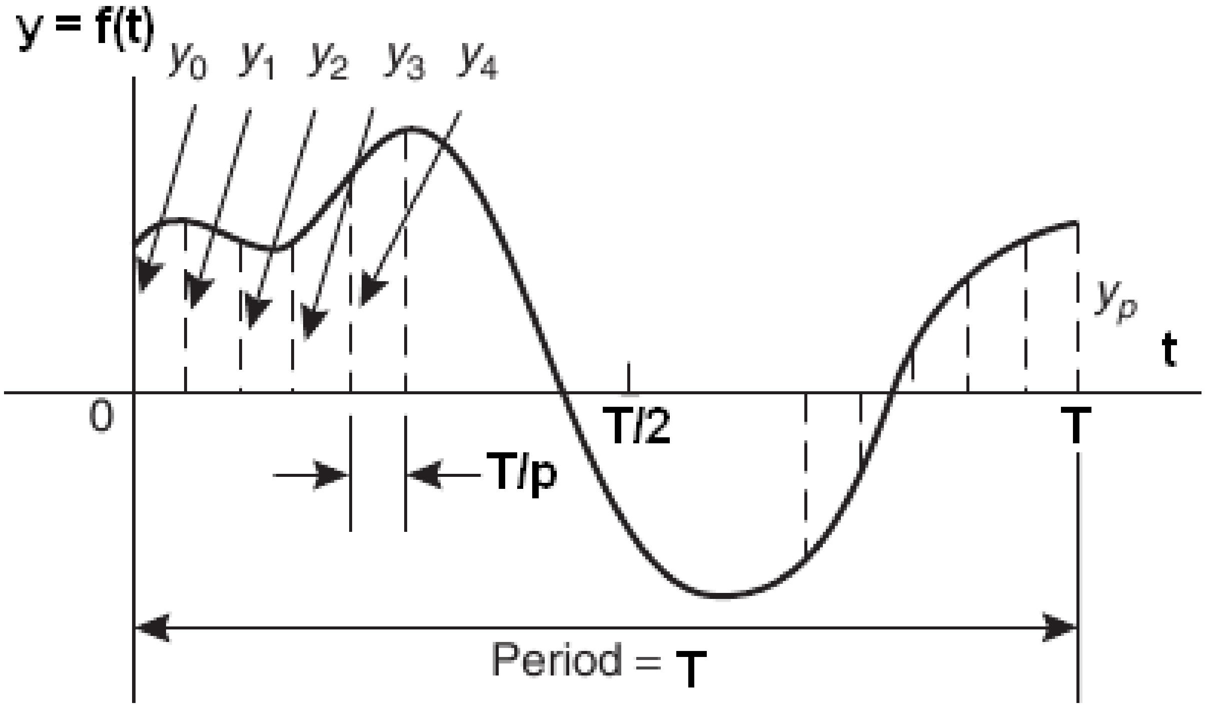
$$b_n = \frac{1}{n\pi}[10.\cos(0) - 10\cos(n\pi)] = \frac{20}{n\pi} \text{ (n:odd)}$$

1.6 Phương pháp số tìm a_n và b_n :

a) Giới thiệu:

❖ Không phải lúc nào cũng có dạng tường minh hàm f(t).

❖ Tìm chuỗi Fourier khi f(t) cho dạng bảng số hay đồ thị.



b) Thuật toán hình thang :

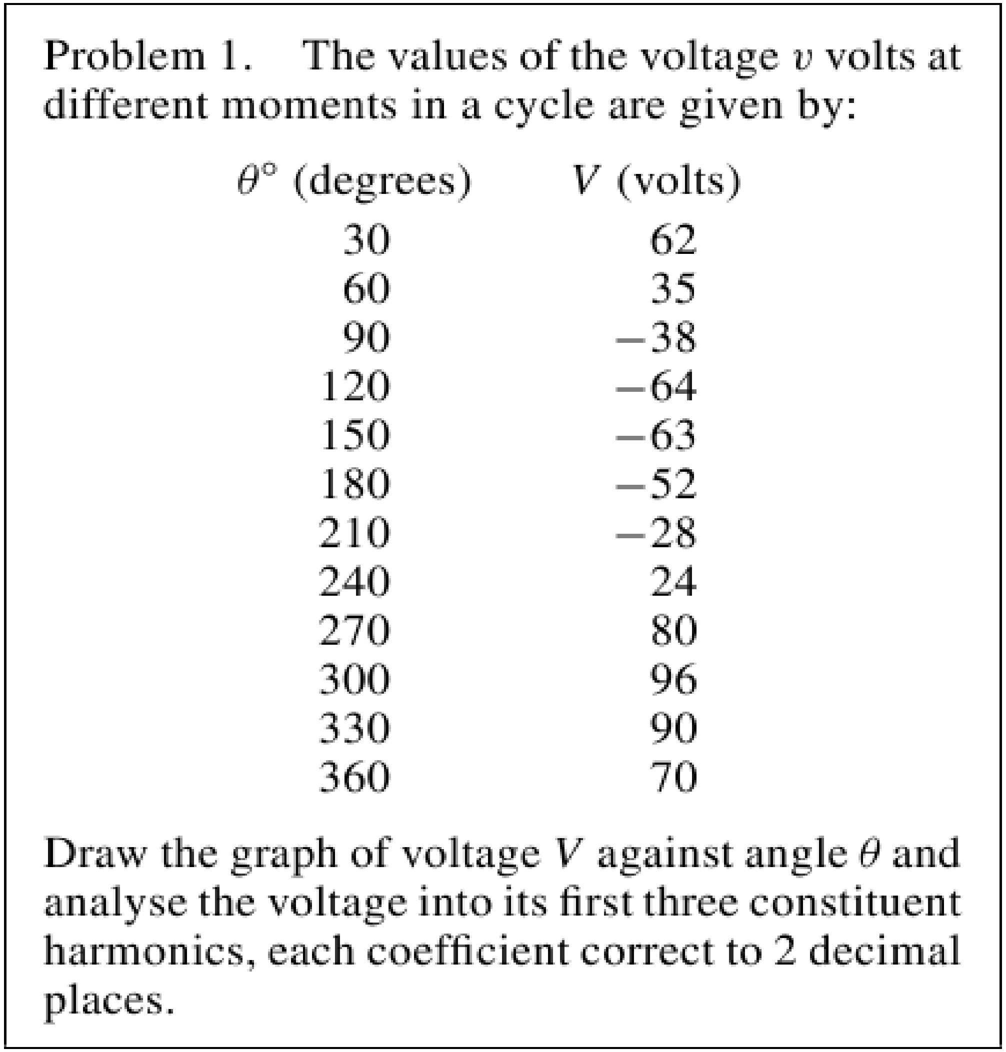
- **Nếu trong chu kỳ, tín hiệu f(t) được lấy p mẫu: T = p.Δt theo qui luật $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$, … thì:**

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \approx \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} f(t_k) \qquad \textbf{(1.15a)}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} f(t_k)\cos(n\omega_0 t_k) \qquad \textbf{(1.15b)}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} f(t_k)\sin(n\omega_0 t_k) \qquad \textbf{(1.15c)}$$

❖ Ex 1.6.1: The numerical method



Problem 1. The values of the voltage v volts at different moments in a cycle are given by:

$\theta°$ (degrees)	V (volts)
30	62
60	35
90	−38
120	−64
150	−63
180	−52
210	−28
240	24
270	80
300	96
330	90
360	70

Draw the graph of voltage V against angle θ and analyse the voltage into its first three constituent harmonics, each coefficient correct to 2 decimal places.

❖ Compute a_1 and b_1:

k	$\omega_0 t_k$	$f(t_k)$	$\cos(\omega_0 t_k)$	$\sin(\omega_0 t_k)$	$f(t_k)\cos(\omega_0 t_k)$	$f(t_k)\sin(\omega_0 t_k)$
1	30°	62	0.866	0.5	53.69	31
2	60°	35	0.5	0.866	17.5	39.31
3	90°	-38	0	1	0	-38
4	120°	-64	-0.5	0.866	32	-55.42
5	150°	-63	-0.866	0.5	54.56	-31.5
6	180°	-52	-1	0	52	0
7	210°	-28	-0.866	-0.5	24.25	14
8	240°	24	-0.5	-0.866	-12	-20.78
9	270°	80	0	-1	0	-80
10	300°	96	0.5	-0.866	48	-83.14
11	330°	90	0.866	-0.5	77.94	-45
12	360°	70	1	0	70	0
					$a_1=(2/12)\sum(\text{col}) = 69.66$	$b_1=(2/12)\sum(\text{col}) = -46.42$

- # Compute a_2 and b_2:

k	$\omega_0 t_k$	$f(t_k)$	$\cos(2\omega_0 t_k)$	$\sin(2\omega_0 t_k)$	$f(t_k)\cos(2\omega_0 t_k)$	$f(t_k)\sin(2\omega_0 t_k)$
1	30°	62	0.5	0.866	31	53.69
2	60°	35	- 0.5	0.866	- 17.5	30.31
3	90°	- 38	- 1	0	38	0
4	120°	- 64	- 0.5	- 0.866	32	55.42
5	150°	- 63	0.5	- 0.866	- 31.5	54.56
6	180°	- 52	1	0	- 52	0
7	210°	- 28	0.5	0.866	- 14	- 24.25
8	240°	24	- 0.5	0.866	- 12	20.78
9	270°	80	- 1	0	- 80	0
10	300°	96	- 0.5	- 0.866	- 48	- 83.14
11	330°	90	0.5	- 0.866	45	- 77.94
12	360°	70	1	0	70	0
					a_2= (2/12)∑(col) = - 6.5	b_2= (2/12)∑(col) = 4.91

1.7 Các dạng khác của chuỗi Fourier

1.7.1 Chuỗi Fourier dạng mũ phức:

- Từ dạng lượng giác, ta có dạng mũ phức của chuỗi Fourier:

$$f(t) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \qquad \textbf{(1.16)}$$

Trong đó:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c}_n \qquad \textbf{(1.17)}$$

- Hoặc tính trực tiếp các hệ số c_0 và c_n theo công thức :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-in\omega_0 t} dt \qquad \textbf{(1.18)}$$

1.7.2 Chuổi Fourier dạng sóng hài:

- **Từ chuổi Fourier dạng mũ phức:**

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t} \right)$$

$$\Rightarrow f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos\left(n\omega_0 t + \angle c_n \right)$$

❖ Ta có chuỗi Fourier dạng sóng hài côsin:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) \qquad (1.19)$$

Với: $A_0 = \frac{1}{2} a_0$ **(1.20)**

$$A_n \angle \alpha_n = a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \angle -\tan^{-1}(b_n / a_n) \qquad (1.21)$$

- **Hoặc viết dạng sóng hài sin của chuỗi Fourier:**

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \beta_n) \qquad (1.22)$$

❖ Ý nghĩa của chuỗi Fourier hài:

- **Khai triển dạng sóng hài côsin của chuỗi Fourier:**

$$f(t) = A_0 + A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2\cos(2\omega_0 t + \alpha_2)$$
$$\ldots \quad + A_k\cos(k\omega_0 t + \alpha_k) + \ldots$$

i. **Tín hiệu tuần hoàn = tín hiệu DC + các tín hiệu AC có tần số là bội số của tần số cơ bản (gọi là hài).**

ii. **Giải bài toán tác động tuần hoàn = bài toán xếp chồng.**

iii. **Tạo tín hiệu tuần hoàn = lấy tổng các tín hiệu cơ bản (nguyên lý chế tạo của function generator).**

1.7.3 Quan hệ giữa các hệ số a_n, b_n, A_n, c_n :

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 = 2c_0;\ a_n &= c_n + c_{-n} = 2\operatorname{Re}\{c_n\}; \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = -2\operatorname{Im}\{c_n\} \end{aligned}} \qquad (1.23)$$

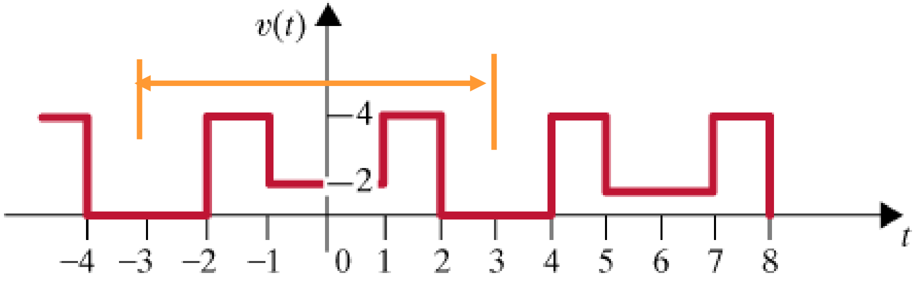
$$\boxed{c_0 = A_0;\ |c_n| = |c_{-n}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \tfrac{1}{2}A_n} \qquad (1.24)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\arg\{c_n\} = -\tan^{-1}(b_n/a_n) = \alpha_n; \\ &\arg\{c_{-n}\} = \tan^{-1}(b_n/a_n) = -\alpha_n \end{aligned}} \qquad (1.25)$$

$$\boxed{c_0 = A_0;\ c_n = \tfrac{1}{2}A_n e^{i\alpha_n};\ c_{-n} = \tfrac{1}{2}A_n e^{-i\alpha_n}} \qquad (1.26)$$

❖VD1.7.1: Các dạng khác của chuỗi Fourier

Xác định chuỗi Fourier dạng mũ phức biểu diễn cho v(t) ?



Giải

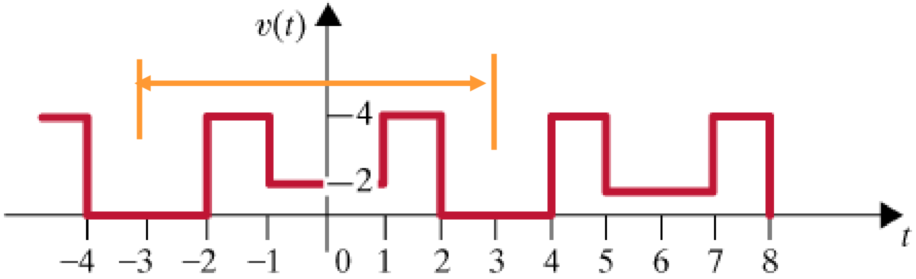
- **Xác định các thông số:** $\mathrm{T} = 6$ $\omega_0 = \dfrac{\pi}{3}$

- **Tính các hệ số:** $C_0 = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_{-2}^{2} v(t)dt = 2$

$$C_n = \frac{1}{6}\int_{-2}^{4} \mathrm{v(t).e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} dt = \frac{1}{6}\left[\int_{-2}^{-1} 4e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}t} dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}t} dt + \int_{1}^{2} 4e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}t} dt\right]$$

❖VD1.7.1: Các dạng khác của chuỗi Fourier

Xác định chuỗi Fourier dạng mũ phức biểu diễn cho v(t) ?



Giải

❖ **Rút gọn:**

$$C_n = \frac{1}{i2n\pi}\left[4e^{i\frac{2n\pi}{3}} - 4e^{i\frac{n\pi}{3}} + 2e^{i\frac{n\pi}{3}} - 2e^{-i\frac{n\pi}{3}} + 4e^{-i\frac{n\pi}{3}} - 4e^{-i\frac{2n\pi}{3}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{n\pi}\left[4\sin\frac{2n\pi}{3} - 2\sin\frac{n\pi}{3}\right]$$

❖ **Chuỗi dạng mũ phức:**

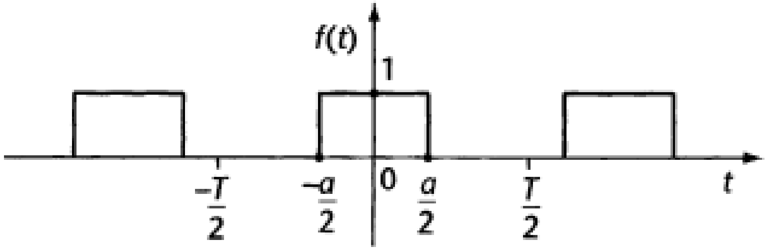
$$v(t) = 2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left[4\sin\frac{2n\pi}{3} - 2\sin\frac{n\pi}{3}\right] e^{i\frac{n\pi}{3}t}$$

❖VD1.7.2: Các dạng khác của chuỗi Fourier

a:

To find the complex Fourier series for the function

$$f(t)=\begin{cases}0 & -T/2<t<-a/2\\ 1 & -a/2<t<a/2\\ 0 & a/2<t<T/2\end{cases}\qquad \text{where } f(t+T)=f(t)$$

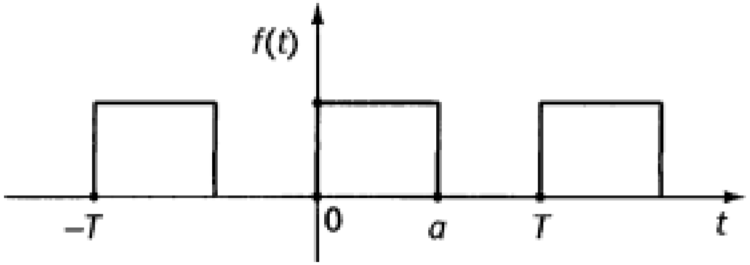


$$\boxed{f(t)=\frac{a}{T}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{a}{T}\left(\frac{\sin n\pi a/T}{n\pi a/T}\right)e^{jn\omega_0 t}}$$

b:

To find the complex Fourier series for the function

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<a\\ 0 & a<t<T\end{cases}\qquad \text{where } f(t+T)=f(t)$$



$$\boxed{f(t)=\frac{a}{T}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}e^{-jn\pi a/T}\,\frac{a}{T}\left(\frac{\sin n\pi a/T}{n\pi a/T}\right)e^{jn\omega_0 t}}$$

1.8 Ứng dụng của chuỗi Fourier

1.8.1 Trị trung bình và hiệu dụng của hàm tuần hoàn:

Nếu một hàm tuần hoàn f chu kỳ T được khai triển lần lượt thành chuỗi Fourier dạng chuẩn, dạng sóng hài côsin hay sin và dạng mũ phức thì:

- **Trị trung bình (Average value) của hàm f là: $a_0/2 = A_0 = c_0$.**

- **Trị hiệu dụng (RMS value) f_{hd} của hàm f lần lượt là:**

$$f_{hd} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)} \quad (1.27)$$

$$f_{hd} = \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \quad (1.28)$$

$$f_{hd} = \sqrt{c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2} \quad (1.29)$$

❖ Trị hiệu dụng chính xác:

- Trị hiệu dụng (RMS value) của hàm tuần hoàn f(t) được định nghĩa:

$$\boxed{F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}}$$

- Giá trị hiệu dụng tính trực tiếp theo công thức trên trên dạng tín hiệu được xem là giá trị chính xác (exact value).

- Giá trị hiệu dụng tính theo chuỗi Fourier hài lấy đến hài thứ k được xem là giá trị xấp xỉ (estimate value).

- Sai số của việc tính giá trị hiệu dụng theo chuỗi Fourier hài:

$$\boxed{\text{error} = \left[\frac{\text{estimate} - \text{exact}}{\text{exact}}\right]100\%}$$

1.8.2 Phổ biên độ của chuỗi Fourier:

Gọi tần số cơ bản là : $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$ **(1.30)**

Và tần số của sóng hài bậc n là : $\boxed{\omega_n = n\omega_0 = \frac{2n\pi}{T}}$ **(1.31)**

Dựa vào chuỗi Fourier mũ phức : $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1.32)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-in\omega_0 t}dt \quad (1.33)$$

- **<u>Định nghĩa 1.4:</u> Phổ biên độ của chuỗi Fourier mũ phức của hàm tuần hoàn f là đồ thị các điểm ($n\omega_0$, $|c_n|$).** **(1.34)**
- **Phổ biên độ còn gọi là phổ tần số hay tần phổ.**

Phổ biên độ một phía:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) \qquad (2)$$

Cosine expansion

- Phoå bieân ñoä : bieåu dieãn A_n theo n .
- Phoå pha : bieåu dieãn α_n theo n .

❖VD1.8.1: Ứng dụng của chuỗi Fourier

Tín hiệu áp trên một nhánh cho bởi: v(t) = – 2 + 10cos(4t) + 8cos(6t) + 6cos(8t) – 5sin(4t) – 3sin(6t) – sin(8t) V. Xác định: (a) Chu kỳ của v(t) ? (b) Trị trung bình của v(t) (c) Trị hiệu dụng của v(t) ?

Giải

a) Xác định T: Có:

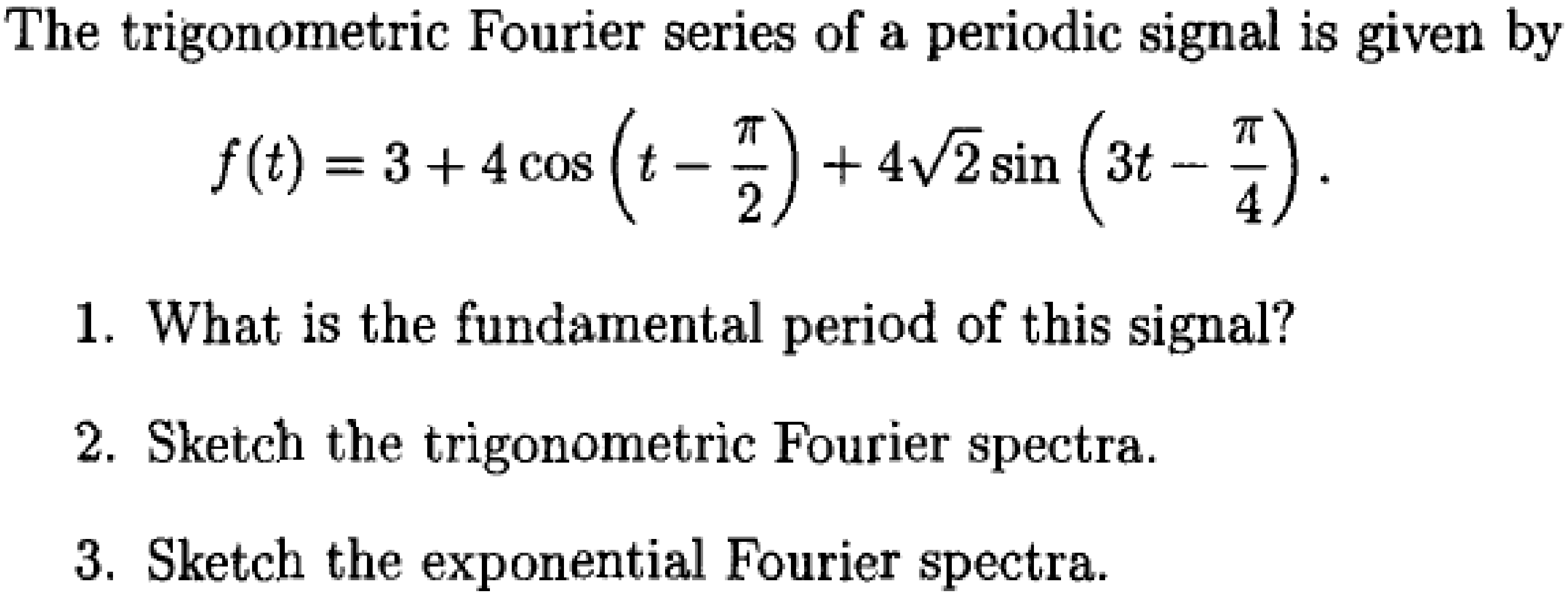
$$\begin{cases} 4T = k2\pi \\ 6T = l2\pi \\ 8T = m2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} l = 3k/2 \\ m = 2k \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ l = 3 \\ m = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T = \pi}$$

b) Trị trung bình của v(t): – 2

c) Phổ biên độ và Trị hiệu dụng của v(t) :

$$\boxed{V_{hd} = \sqrt{(-2)^2 + \frac{1}{2}[10^2 + 8^2 + 6^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2]} = 11,023}$$

❖ Ex 1.8.2: Frequency Spectra



The trigonometric Fourier series of a periodic signal is given by

$$f(t) = 3 + 4\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sqrt{2}\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right).$$

1. What is the fundamental period of this signal?
2. Sketch the trigonometric Fourier spectra.
3. Sketch the exponential Fourier spectra.

❖ Ex 1.8.3: Frequency Spectra

Determine and plot the first four terms of the spectrum

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\ odd}}^{\infty} \frac{20}{n\pi}\sin n\omega_0 t - \frac{40}{n^2\pi^2}\cos n\omega_0 t)$$

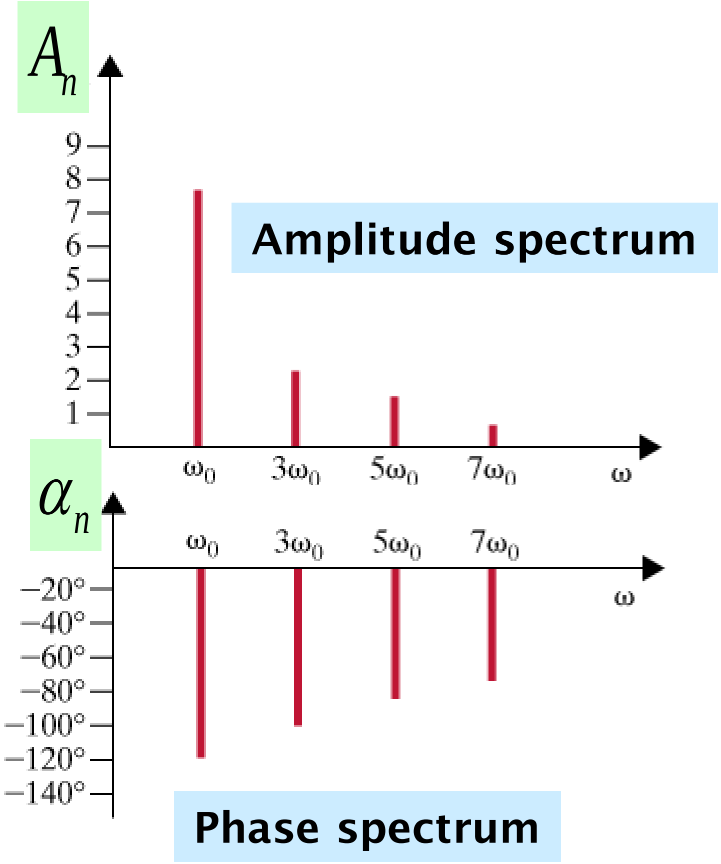
$$\boxed{A_n\angle\alpha_n = 2C_n = a_n - jb_n}$$

$$A_1\angle\alpha_1 = -\frac{40}{\pi^2} - j\frac{20}{\pi} = 7.5\angle -122°$$

$$A_3\angle\alpha_3 = -\frac{40}{9\pi^2} - j\frac{20}{3\pi} = 2.2\angle -102°$$

$$A_5\angle\alpha_5 = 1.3\angle -97°$$

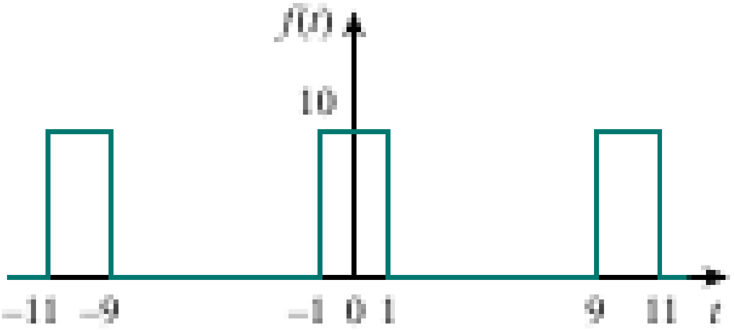
$$A_7\angle\alpha_7 = 0.92\angle -95°$$



Amplitude spectrum

Phase spectrum

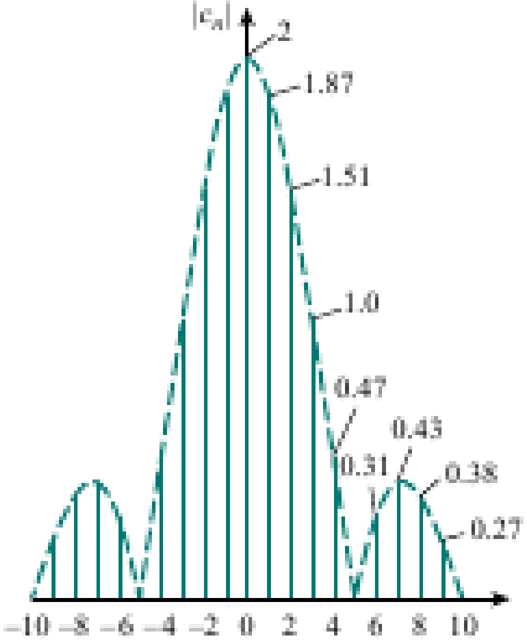
Ex 1.8.4: Frequency Spectra ?



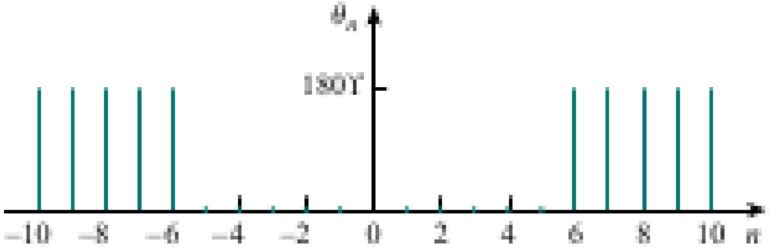
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\left|C_n\right| = 2\left|\frac{\sin(n\pi/5)}{n\pi/5}\right|$$

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \sin(n\pi/5) > 0 \\ 180^0, & \sin(n\pi/5) < 0 \end{cases}$$



The amplitude of a periodic pulse train.



The phase spectrum of a periodic pulse train.

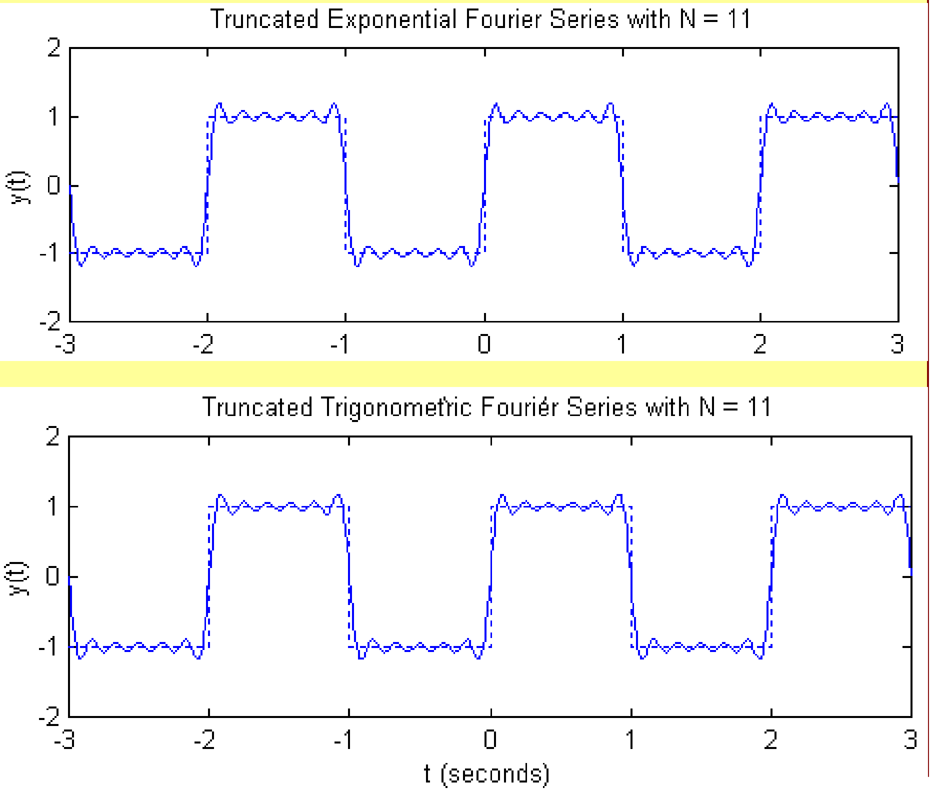
❖ Ex 1.8.5: Using MATLAB

Representation of a symmetrical square wave (E_m = ±1, T=2) using Fourier with N = 11 harmonics and plot its spectrum ? (EX1_1)

```
% Description: This M-file plots the truncated Fourier Series
%            representation of a square wave (Em =+-1, T=2) and its
%            amplitude and phase spectrum.
clear;                          % clear all variables
clf;                            % clear all figures
N = 11;                         % summation limit (use N odd)
wo = pi;                        % fundamental frequency (rad/s)
c0 = 0;                         % dc bias
t = -3:0.01:3;                  % declare time values
figure(1)                       % put first two plots on figure 1
% Compute yce, the Fourier Series in complex exponential form
yce = c0*ones(size(t));         % initialize yce to c0
for n = -N:2:N,                 % loop over series index n (odd)
  cn = 2/(j*n*wo);              % Fourier Series Coefficient
  yce = yce + real(cn*exp(j*n*wo*t)); % Fourier Series computation
end
subplot(2,1,1)
plot([-3 -2 -2 -1 -1  0 0 1  1  2 2 3],...    % plot original y(t)
    [-1 -1  1  1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1], ':');
hold;
```

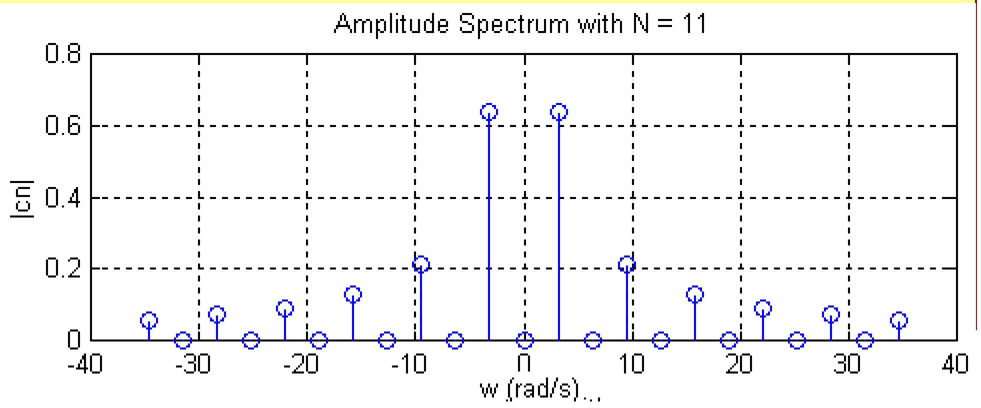
❖ Ex 1.8.5: Using MATLAB

```
plot(t,yce);                                   % plot truncated exponential FS
xlabel('t (seconds)'); ylabel('y(t)');
ttle = ['Truncated Exponential Fourier Series with N = ',num2str(N)];
title(ttle);
hold;
% Compute yt, the Fourier Series in trigonometric
yt = c0*ones(size(t));           % initialize yt to c0

for n = 1:2:N,                      % loop over series index
  cn = 2/(j*n*wo);                  % Fourier Series Coeffic
  yt = yt + 2*abs(cn)*cos(n*wo*t+angle(cn));% Fouri
end

subplot(2,1,2)
plot([-3 -2 -2 -1 -1  0 0 1  1  2 2 3],...    % plot original
     [-1 -1  1  1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1], ':');
hold;                               % plot truncated trigonome
plot(t,yt);
xlabel('t (seconds)'); ylabel('y(t)');
ttle = ['Truncated Trigonometric Fourier Series witl
title(ttle);
hold;
```



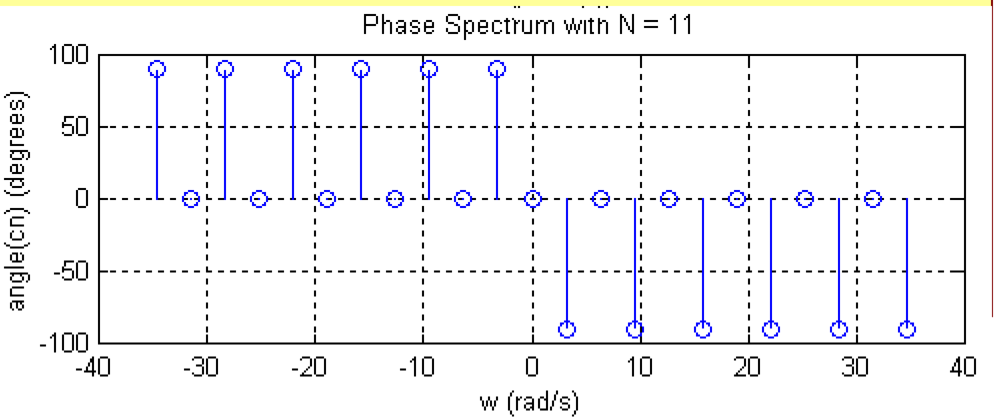
Ex 1.8.5: Using MATLAB

```
% Draw the amplitude spectrum from exponential Fourier Series
figure(2)                          % put next plots on figure 2
subplot(2,1,1)
stem(0,c0);                        % plot c0 at nwo = 0
hold;
for n = -N:2:N,                    % loop over series index n
  cn = 2/(j*n*wo);                 % Fourier Series Coefficient
  stem(n*wo,abs(cn))                   % plot |cn| vs nwo
end
for n = -N+1:2:N-1,                % loop over even series index n
  cn = 0;                          % Fourier Series Coefficient
  stem(n*wo,abs(cn));                  % plot |cn| vs nwo
end
xlabel('w (rad/s)')
ylabel('|cn|')
ttle = ['Amplitude Spectrum with N = ',num2str(N
title(ttle);
grid;
hold;
```



❖ Ex 1.8.5: Using MATLAB

```
% Draw the phase spectrum from exponential Fourier Series
subplot(2,1,2)
stem(0,angle(c0)*180/pi);         % plot angle of c0 at nwo = 0
hold;
for n = -N:2:N,                   % loop over odd series index n
  cn = 2/(j*n*wo);                % Fourier Series Coefficient
  stem(n*wo,angle(cn)*180/pi);    % plot |cn| vs nwo
end
for n = -N+1:2:N-1,               % loop over even series index n
  cn = 0;                         % Fourier Series Coefficient
  stem(n*wo,angle(cn)*180/pi);    % plot |cn| vs nwo
end

xlabel('w (rad/s)')
ylabel('angle(cn) (degrees)')
ttle = ['Phase Spectrum with N = ',num2str(N)];
title(ttle);
grid;
hold;
```



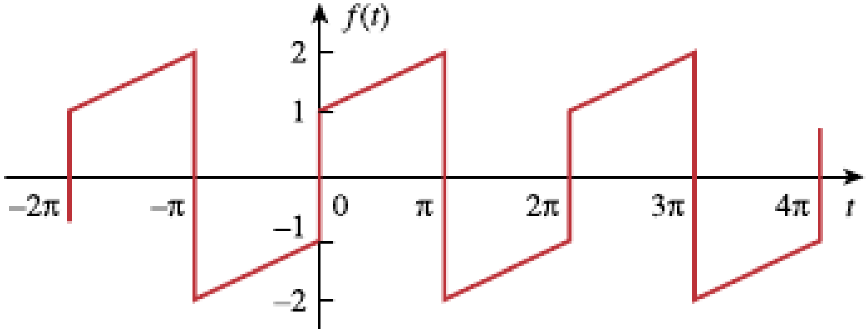
❖**Examples:** Frequency Spectra ?

VD1.8.6: (a) find the trigonometric Fourier series coefficients a_2 and b_2,

(b) calculate the magnitude and phase of the component of $f(t)$ that has $\omega_n = 10$ rad/s,

(c) use the first four nonzero terms to estimate $f(\pi/2)$.

(d) show that $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$$



$a_2 = \mathbf{0}$, $b_2 = \mathbf{-0.3183}$ | $A_{10} = \mathbf{0.06366}$ $\phi_{10} = \mathbf{90°}$

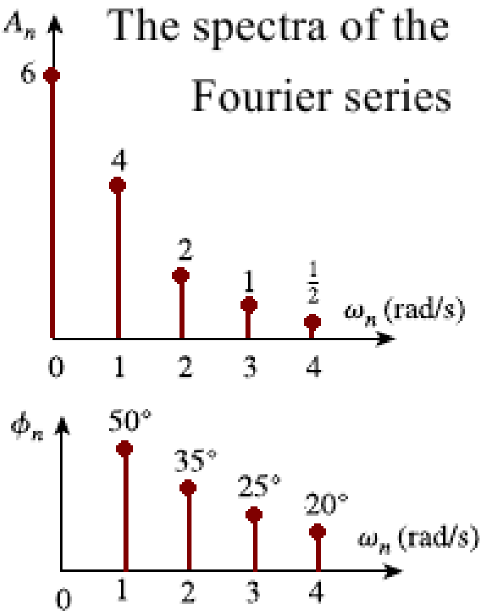
$f(\pi/2) \cong \mathbf{1.3824}$

$f(\pi/2) = 1.5 = (6/\pi)[1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \;---]$

$\pi/4 = \mathbf{1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \;---}$

❖Examples: Frequency Spectra ?

VD1.8.7: **Find Fourier series and RMS value ?**



$6 + 4\cos(t + 50°) + 2\cos(2t + 35°) + \cos(3t + 25°) + 0.5\cos(4t + 20°)$

<u>6.828</u>

VD1.8.8:

The voltage across a device is given by

$$v(t) = -2 + 10\cos 4t + 8\cos 6t + 6\cos 8t - 5\sin 4t - 3\sin 6t - \sin 8t \text{ V}$$

Find:

(a) the period of $v(t)$,

(b) the average value of $v(t)$,

(c) the effective value of $v(t)$.

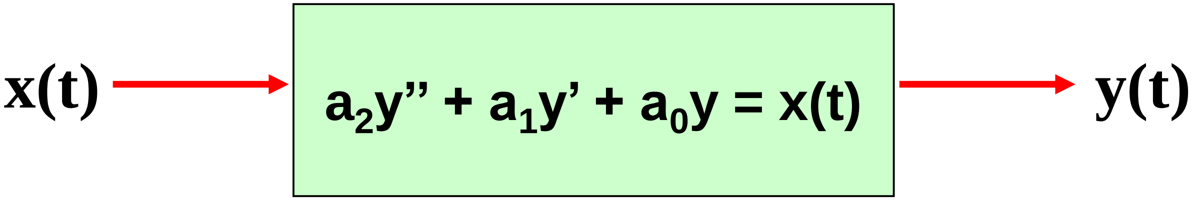
(*Ans:* T= π; DC= – 2; RMS = 11.02)

1.8.3 Nghiệm xác lập của nguồn tuần hoàn

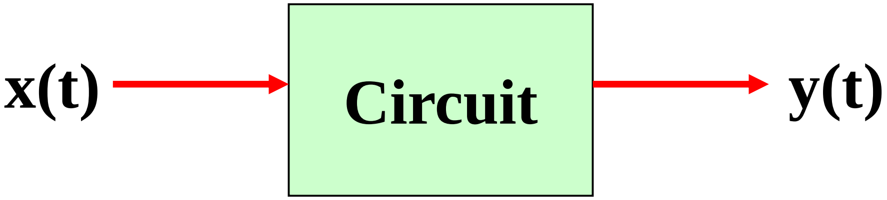
a) Bài toán:

❖ Tìm đáp ứng xác lập (steady-state response), hay là nghiệm riêng y(t) của PTVP nếu tác động (vế phải) x(t) = là tín hiệu tuần hoàn ?

❖Mô hình bài toán: Cho bởi PTVP hay một mạch điện.



x(t) → $a_2y'' + a_1y' + a_0y = x(t)$ → y(t)



x(t) → Circuit → y(t)

b) Qui trình giải bài toán:

Step1: **Xác định chuỗi Fourier dạng mũ phức của x(t):**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

Step2: **Xác định hàm truyền của mô hình:** $H(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

Thay : $a_n y^{(n)} = a_n (j\omega)^n Y(\omega)$ hay đưa mạch sang miền ω.

Step3: **Xác định chuỗi Fourier dạng mũ phức của y(t):**

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n H(jn\omega_0).e^{jn\omega_0 t}$$

❖ Nếu có mô hình mạch điện :

i. Chuyển mạch sang miền ω (miền phức) bằng cách thay thế R → R; L → jωL và tụ C → 1/(jωC).

ii. Nguồn tuần hoàn thay bằng X(ω).

iii. Giải mạch để có nghiệm Y(ω).

iv. Tính H(jω) bằng Y(ω)/X(ω). Thay ω trong biểu thức H(jω) bằng $n\omega_0$.

❖ VD1.8.9: Đáp ứng của nguồn tuần hoàn

Tìm y(t) là nghiệm của PTVP: y'' + y = x(t) biết x(t) là tín hiệu tuần hoàn: x(t) = 100 (0 < t < 2) & x(t) = 0 (2 < t < 4) ?

Step1: **Ta có $\omega_0 = \pi/2$ và:**

$$x(t) = 50 + \sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty} \frac{50(1-\cos n\pi)}{\mathrm{j}n\pi} e^{\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}t}$$

Step2: **Hàm truyền:**

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1-\omega^2} = \frac{1}{1-(n\pi/2)^2} = \frac{4}{4-n^2\pi^2}$$

Step3: **Tìm y(t):**

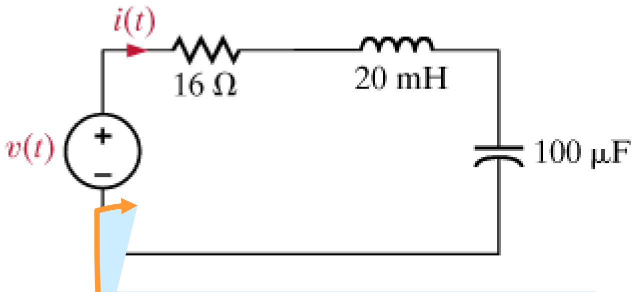
$$Y_0 = X_0 H(\omega = 0) = 50$$

$$y(t) = 50 + \sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty} \frac{200(1-\cos n\pi)}{\mathrm{j}n\pi(4-n^2\pi^2)} e^{\mathrm{j}n\pi t/2}$$

Chuỗi hài:

$$y(t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400(1-\cos n\pi)}{n\pi(4-n^2\pi^2)} \cos\left(n\tfrac{\pi}{2}t - 90^0\right)$$

❖ VD1.8.10: Đáp ứng nguồn nhiều tần số



Determine the current, *i*(*t*), if:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = 42 + 16\cos(377\boldsymbol{t} + 30°) + 12\cos(754\boldsymbol{t} - 20°)[\boldsymbol{V}]$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{j}\omega) = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{jL}\omega + \frac{1}{\boldsymbol{jC}\omega}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z(j\omega)}$$

$\omega = 0$

capacitor acts as open circuit $(Z = \infty)$

$I_0 = 0$

$$\omega = 377; \dot{V}(\omega = 377) = 16\angle 30°,$$

$$Z(j377) = 16 + j0.020 \times 377 - j\frac{1}{10^{-4}377}$$

$$\dot{I}(\omega = 377) = \frac{16\angle 30°}{16 + j7.54 - j26.53} = 0.64\angle 79.88°$$

$$\omega = 754; \dot{V}(\omega = 754) = 12\angle -20°,$$

$$Z(j754) = 16 + j0.020 \times 754 - j\frac{1}{10^{-4} \times 754}$$

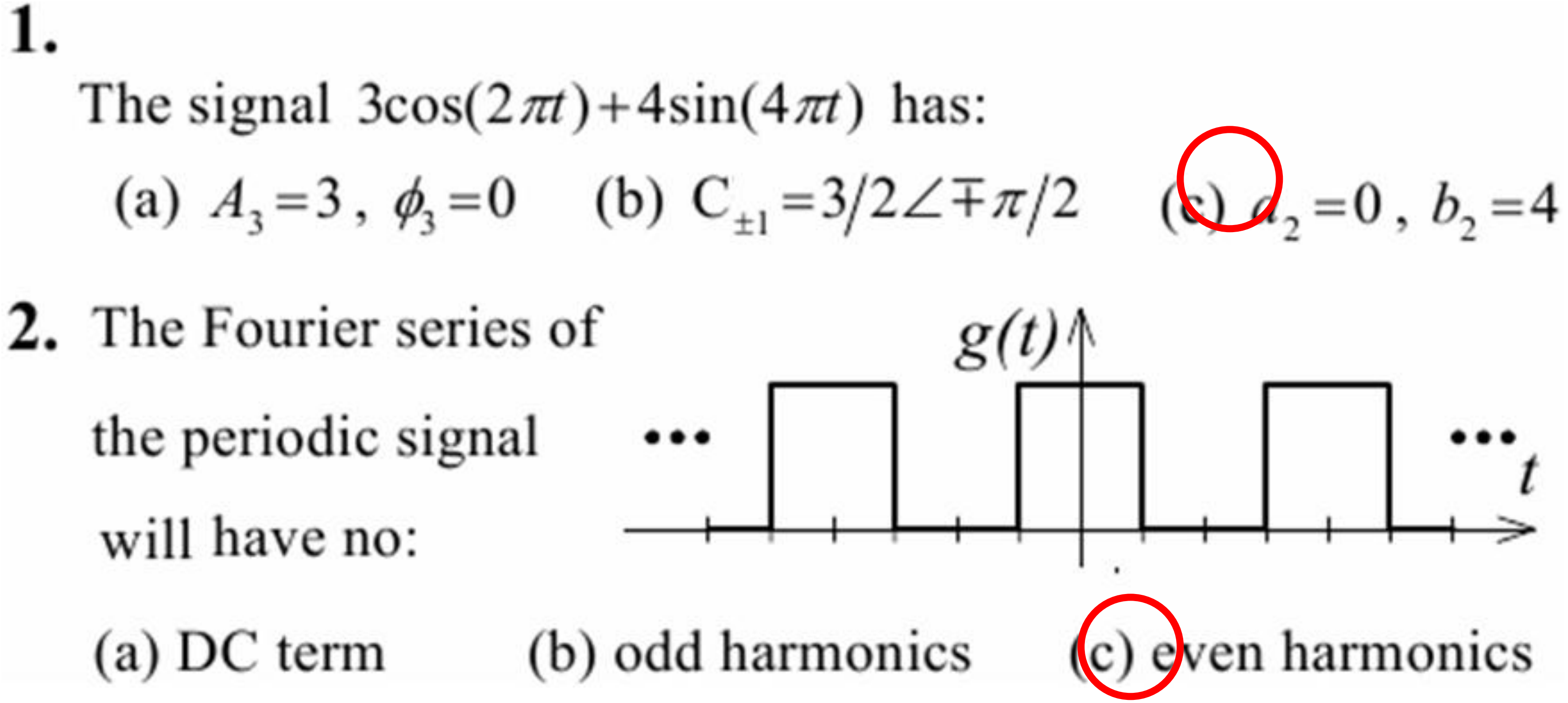
$$\dot{I}(\omega = 754) = \frac{12\angle -20°}{16 + j15.08 - j13.26} = 0.75\angle -26.49°$$

$$\boxed{i(t) = 0.64\sin(377t + 79.88°) + 0.75\cos(754t - 26.49°) \quad A}$$

Quizzes:

Fourier Series

❖**Quiz1:** Encircle the correct answer



1.

The signal $3\cos(2\pi t)+4\sin(4\pi t)$ has:

(a) $A_3=3$, $\phi_3=0$ (b) $C_{\pm 1}=3/2\angle\mp\pi/2$ [✓ (c) $a_2=0$, $b_2=4$]

2. The Fourier series of the periodic signal will have no:

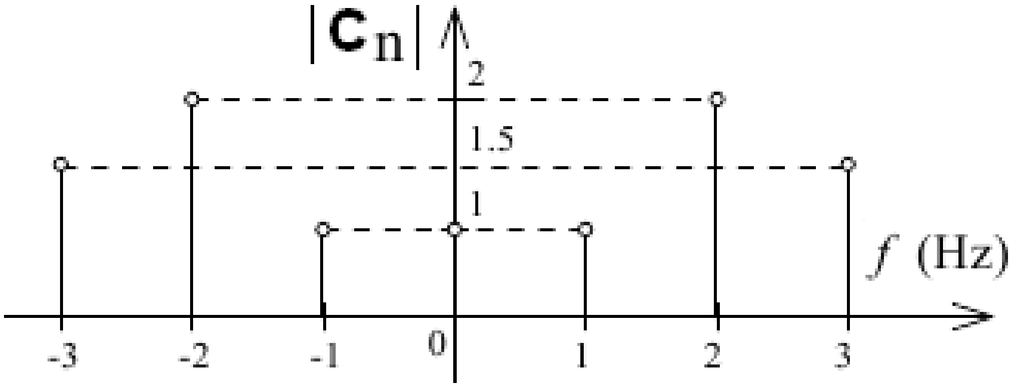
(a) DC term (b) odd harmonics [✓ (c) even harmonics]

❖**Quiz1:** Encircle the correct answer

3. The double-sided amplitude spectrum of a real signal always possesses:

[✓ (a) even symmetry] (b) odd symmetry (c) no symmetry

4. Amplitude spectrum of a signal. The power (across 1Ω) is:



(a) 14.5 W (b) 10 W [✓ (c) 15.5 W]