CHƯƠNG IV: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Khái niệm

Trong toán học, phương trình vi phân là một chuyên ngành phát triển, có tầm quan trọng và có nhiều ứng dụng thực tế trong các lãnh vực khoa học kỹ thuật, kinh tế. Để làm quen với khái niệm phương trình vi phân ta xem một số bài toán dẫn tới việc thiết lập phương trình vi phân dưới đây.

2. Một số bài toán dẫn tới phương trình vi phân

<u>Thí dụ 1</u>: Cho một vật khối lượng m rơi tự do trong không khí. Giả sử sức cản không khí tỉ lệ với vận tốc rơi là v(t) vào thời thời điểm t với hệ số tỉ lệ là k > 0. Tìm v(t).

Ta có khi vật rơi thì lực tác dụng lên vật gồm có : lực hút của trái đất là mg và lực cản của không khí là kv(t). Do đó theo định luật Newton, ta có: ma = F

với a là gia tốc của vật rơi. Nghĩa là ta có phương trình :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

hay $mv' = mg - kv$

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm v(t).

<u>Thí dụ 2</u>: Cho một thanh kim loại được nung nóng đến nhiệt độ 300^o, và được đặt trong 1 môi trường đủ rộng với nhiệt độ không đổi là 30^o (và nhiệt độ tỏa ra từ thanh kim loại không làm thay đổi nhiệt độ môi trường). Tìm T(t) là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm t.

Theo quy luật Newton tốc độ giảm nhiệt của thanh kim loại ($\frac{dT}{dt}$) tỉ lệ với hiệu nhiệt độ của vật thể T(t) và nhiệt độ môi trường 30^o. Do đó ta có: T'(t) = -k(T(t) – 30o)

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm T(t), trong đó k >0 là hệ số tỉ lệ và T(0) = 300 là điều kiện ban đầu của bài toán.

<u>Thí dụ 3</u>: Tìm phương trình y = f(x) của một đường cong biết rằng tiếp tuyến tại mỗi điểm sẽ cắt trục tung tại điểm khác có tung độ bằng hai lần tung độ tiếp điểm.

Biết rằng phương trình tiếp tuyến với đường cong y= f(x) tại điểm Mo(xo, yo) tại có dạng: y- yo = f ’(xo)(x - xo)

Giao điểm của tiếp tuyến với trục tung (x= 0) có tung độ là :

y_1 = yo - f’(xo)(xo)

Theo giả thiết có : y_1 = 2 yo, từ đó có phương trình: yo = f’(xo)(xo)

Với điểm Mo(xo, yo) là bất kỳ, nên ta có phương trình vi phân : $y' = \frac{y}{x}$

3. Định nghĩa phương trình vi phân – Nghiệm, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị của phương trình.

3.1 Định nghĩa cơ bản phương trình vi phân

Phương trình vi phân thường (gọi tắt phương trình vi phân) là biểu thức liên hệ giữa một biến độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm của nó.

Nếu phương trình chứa nhiều biến độc lập cùng với hàm của các biến này cần phải tìm và các đạo hàm riêng của hàm theo các biến thì ta gọi đó là phương trình vi phân đạo hàm riêng (gọi tắt phương trình đạo hàm riêng).

Trong chương này ta chỉ xét các phương trình vi phần (thường). Cấp (hay bậc) của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình. Thí dụ các phương trình trong các bài toán ở các thí dụ I.2 là các phương trình vi phân cấp một. Tổng quát phương trình vi phân cấp một có dạng :

F(x,y,y’) = 0

hay y’ = f(x,y)

Trong đó F là hàm độc lập theo 3 biến, và f là hàm độc lập theo 2 biến.

Một cách tổng quát, phương trình vi phân cấp n có dạng :

$F(x,y,y',\ldots\ldots, y^{(n)})=0$

hoặc $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots\ldots,y^{(n-1)})$

<u>Thí dụ 4</u>:

a) Các phương trình sau là phương trình vi phân cấp 1: $xy'^2 + \sin y = 0$

$$\sin(y') + x^2 + \sqrt{y-1} = 0$$

b) Các phương trình sau là phương trình vi phân cấp 2 y’’= 3y’ + 2xy + sinx

$$\sqrt{x^2-1}\cos y' = \sin(y'')$$

3.2. Nghiệm - nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

3.2.1. Nghiệm:

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm y= φ (x) (hoặc dạng Φ (x,y) = 0) mà khi thay vào phương trình vi phân ta có một đồng nhất thức. Khi đó đồ thị của y = φ (x) trong mặt phẳng được gọi là đường cong tích phân của phương trình vi phân

Thí dụ 5: Hàm số y=2x là nghiệm của phương trình $y' = \frac{y}{x}$

Ngoài ra , y = Cx, với hằng số C bất kỳ, cũng là nghiệm của phương trình vi phân nói trên. Tuy nhiên nếu đặt thêm điều kiện nghiệm y(xo) = yo (gọi là điều kiện đầu) thì chỉ có 1 nghiệm thỏa là y = Cox với $C_o = \frac{y_o}{x_o}$, tức là chỉ có 1 đường cong tích phân đi qua điểm Mo(xo,yo)

3.2.2. Nghiệm tổng quát – nghiệm riêng – nghiệm kỳ dị

Qua thí dụ 5 ở trên ta thấy nghiệm của một phương trình vi phân có thể có dạng y = φ (x,C) , với C là hằng số, và ta gọi đó là nghiệm tổng quát.

Với mỗi Co ta có một nghiệm là y = φ (x,Co), và gọi là một nghiệm riêng. Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm nhận từ nghiệm tổng quát khi cho hằng số C một giá trị cụ thể.

Tuy nhiên có thể có những nghiệm của phương trình mà nó không nhận được từ nghiệm tổng quát, và ta gọi đó là nghiệm kỳ dị.

Thí dụ 6: phương trình $y' = \sqrt{1-y^2}$ có nghiệm tổng quát là y = sin(x+C), nhưng y=1 vẫn là 1 nghiệm của phương trình nhưng không nhận được nghiệm tổng quát.

Về mặt hình học, một nghiệm tổng quát cho ta một họ các đồ thị của nó trong mặt phẳng, và ta gọi là họ các đường cong tích phân.

4. Bài toán Cauchy - Định lý tồn tại duy nhất nghiệm

Hai thí dụ sau đây cho thấy một phương trình vi phân có thể không có nghiệm, hoặc không có nghiệm tổng quát.

Thí dụ 7: Phương trình : $y'^2 = -1$ không có nghiệm thực.

Phương trình : $|y'| + |y| = 0$ không có nghiệm tổng quát vì chỉ có duy nhất là y = 0

Tuy nhiên với bài toán điều kiện đầu, còn gọi là bài toán Cauchy, thì ta có định lý sau về sự tồn tại duy nhất nghiệm.

4.1. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm (Định lý Picard)

Nếu f(x,y) liên tục trong một miền hình chữ nhật D: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ và Mo(xo,yo) là 1 điểm trong của D. Khi đó bài toán Cauchy :

tìm y thỏa : y' = f(x,y) thỏa điều kiện yo = xo có ít nhất một nghiệm y = φ (x) khả vi liên tục trên một khoảng mở chứa xo.

Ngoài ra nếu fy' cũng liên tục trên D (có thể trên một khoảng mở chứa xo. nhỏ hơn) thì nghiệm đó là duy nhất

Thí dụ 8: Xem bài toán Cauchy : $y' = y^{\frac{4}{5}}\ ,\ y(0) = 0$

Có hai nghiệm là : y = 0 và $y = \left(\frac{x}{5}\right)^5$ (thực ra có nhiều nghiệm), như vậy không thỏa tính duy nhất , vì $f'_y = \frac{4}{5}y^{-1/5}$ không liên tục trong lân cận điểm (0,0)

Thí dụ 9: Xem bài toán Cauchy : $y' = \frac{y}{x}\ ,\ y(x_0) = x_0$

Với xo ≠ 0 có 1 nghiệm duy nhất là y = Cox , $C_0 = \frac{y_0}{x_0}$

Với xo = 0, yo ≠ 0 không có nghiệm vì đường cong tích phân y = Cx không thể đi qua (0, yo) với yo ≠ 0 . Khi đó hàm $f(x,y) = \frac{y}{x}$ không liên tục tại (0, yo). Còn tại (0,0) thì bài toán lại có vô số nghiệm, vì tất cả các đường cong tích phân đều đi qua (0,0)

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

1. Phương trình tách biến (hay biến phân ly)

a) Là phương trình vi phân có dạng : $f_1(x) + f_2(y).y' = 0$ hay $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$ (1)

b) Cách giải : Lấy tích phân phương trình (1) thì có :

$$\int f_1(x)\,dx + f_2(y)\,y'\,dx = C \quad \text{hay} \quad \int f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = C$$

Thí dụ 1 : Giải phương trình vi phân : $y' = (1 + y^2).\, ex$

Phương trình được đưa về dạng :

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx \quad + \quad C$$
$$\Rightarrow arctg\, y = e^x \quad + \ C$$
$$\Rightarrow y \ = tg(e^x \quad + \ C)$$

c) Lưu ý:

Phương trình : $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y).\, dy = 0$ (2)

Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ thì có thể đưa phương trình trên về dạng phương trình tách biến bằng cách chia 2 vế cho $g_1(y)g_2(x)$ ta được :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \quad (3)$$

Nếu $g_1(y) = 0$ thì $y = b$ là nghiệm của (2). Nếu $f_2(x) = 0$ thì $x = a$ là nghiệm của (2). Các nghiệm đặc biệt này không chứa trong nghiệm tổng quát của phương trình (3)

Thí dụ 2: Giải phương trình vi phân: $(y^2 - 1)\, dx - (x^2 + 1)\, y\, dy = 0$

Với $y^2 - 1 \neq 0$ ta có :

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{ydy}{y^2-1} \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2-1} \quad \Rightarrow$$
$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C$$

Ngoài nghiệm tổng quát này ta nhận thấy còn có 2 nghiệm: $y = 1$ và $y = -1$

2. Phương trình đẳng cấp cấp 1

a). Là phương trình vi phân có dạng : $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (4)

Từ (4) có : y = xu --> y' = u + xu'.

Thế vào (4) có: u + xu' = f(u)

có thể đưa về dạng phương trình tách biến :

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \quad (5)$$

Lưu ý: Khi giải phương trình (5) ta nhận được nghiệm tổng quát khi f(u) – u ≠ 0. Nếu f(u) – u = 0 tại u = a thì có thêm nghiệm y = ax.

Thí dụ 3: Giải phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$

Đặt y = xu, ta có phương trình :

$$xu' + u = u + \operatorname{tg}u \Rightarrow \frac{\cos u}{\sin u}du = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C, \quad \text{hay} \quad \sin u = Cx$$

$$\text{hay} \quad \sin\frac{y}{x} = Cx$$

Ngoài ra do f(u) = u ⇔ tg u = 0 ⇔ u = kπ x, nên ta còn có thêm các nghiệm : y = kπ x, với k= 0, ± 1, ± 2, …….

-

Thí dụ 4: Giải phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \; y(1) = 1$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho x^2 ta được :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Đặt y = xu ta có: $\frac{dx}{x} + \frac{2u\,du}{1+3u^2} = 0$

Lấy tích phân ta có :

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left(1+3u^2\right) = C \Rightarrow x^3\left(1+3u^2\right) = \pm e^{3C} = C_1$$

thế $u = \frac{y}{x}$, ta được : $x^3\left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right) = C_1 \Rightarrow x^3 + 3xy^2 = C_1$

Với điều kiện đầu : x = 1, y = 1, ta được nghiệm riêng: $x^3 + 3xy^2 = 4$

b). <u>Chú ý</u>: phương trình: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ (6)

có thể đưa về dạng phương trình đẳng cấp như sau:

b1) Nếu 2 đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau tại (x_1, y_1), thì đặt $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, thì phương trình (6) được đưa về dạng :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = F\left(\frac{Y}{X}\right)$$

b2) Nếu 2 đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ song song nhau, khi đó có : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ nên phương trình (6) được đưa về dạng :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y) \quad (7)$$

khi đó đặt u = $a_1x + b_1y$, phương trình (7) trở thành phương trình tách biến.

<u>Thí dụ 5</u>: Giải phương trình vi phân : $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$

ta có : $x_1=1$, $y_1=2$

Đặt X = x - 1, Y = y - 2 , thì có :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

Đặt u = $u = \frac{y}{x}$, ta có :

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow \frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2} = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C$$

$$\Rightarrow (1-2u+u^2)X^2 = C,\quad X^2 - 2XY - Y^2 = C$$

hay là: $x^2 + 2xy – y^2 + 2x + 6y = C$

3. Phương trình vi phân toàn phần

a). Là phương trình vi phân có dạng :

P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0 (8)

Nếu vế trái là vi phân toàn phần của một hàm số U(x,y), nghĩa là : dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

(theo chương 3, IV.1., thì điều kiện cần và đủ là: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Khi đó từ (8) , (9) ta có : dU(x,y) = 0

Vì thế nếu y(x) là nghiệm của (8) thì do dU(x,y(x)) = 0 cho ta :U(x,y(x)) = C (9)

Ngược lại nếu hàm y(x) thỏa (9) thì bằng cách lấy đạo hàm (9) ta có (8).

Như vậy U(x,y) = C là nghiệm của phương trình (8)

b). Cách giải thứ nhất :

Giả sử P, Q trong (8) thỏa $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ta có U thỏa:

dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

$\rightarrow$ $P = \frac{\partial U}{\partial x},\ Q = \frac{\partial U}{\partial y}$

Lấy tích phân biểu thức $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, thì do y được xem là hằng số nên ta có :

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx \ + \ C(y) \quad (10)$$

trong đó C(y) là hàm bất kỳ theo biến y. Lấy đạo hàm biểu thức (10) theo biến y và do $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, ta được :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \ + \ C'(y) = Q(x,y)$$

từ phương trình vi phân này tìm C(y)

-

Thí dụ 6: Giải phương trình: $(x^2 + y^2)\, dx + (2xy + \cos y)\, dy = 0$

Ta có: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \cos y\right) = 2y$$

➔ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, vậy sẽ có hàm U(x,y) thỏa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \ + \cos y$$

Lấy tích phân hệ thức thứ nhất theo x, ta có:

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x \ + C(y)$$

Lấy đạo hàm biểu thức này theo y, và nhớ $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \ + \cos y$ thì có : 2yx + C'(y) = 2xy + cos y

C'(y) = cos y

C(y) = sin y + C

Vậy có nghiệm của phương trình là: $\frac{x^3}{3} + y^2x + \sin y = C$

c). Cách giải thứ hai (dùng tích phân đường loại 2):

Vì dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

(theo theo chương 3, IV.1., thì điều kiện cần và đủ là : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Nên : $U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \quad (11)$$

Thí dụ 7:

Giải phương trình: (x + y + 1) dx + (x – y^2 + 3) dy = 0

Ta có : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) = 1$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y^2 + 3) = 1$$

➔ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, vậy sẽ có hàm U(x,y) thỏa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - y^2 + 3$$

Sử dụng công thức (10) (với xo = 0, yo=0), có :

$$U(x,y) = \int_0^x (x+1)dx + \int_0^y (x - y^2 + 3)dy$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

Vậy ta có nghiệm của phương trình vi phân :

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$$

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

a). Là phương trình vi phân có dạng: y’ + p(x) y = f(x) (11)

trong đó p(x), f(x) là các hàm liên tục.

Nếu f(x)=0, ta có: y’ + p(x) y = 0 (12)

Phương trình (12) gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

b). Cách giải:

Với phương trình (12), có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C_1,\ C_1$$
$$\Rightarrow y = C e^{-\int p(x)dx},\quad C \neq 0 \qquad (13)$$

Với phương trình (11), có thể giải bằng phương pháp biến thiên hằng số tức là tìm nghiệm của nó ở dạng (13) nhưng coi C là hàm số, dạng :

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)dx} \qquad (14)$$

Lấy đạo hàm (14), thay vào (11), có :

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

hay : $\dfrac{dC}{dx} e^{-\int p(x)dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$

từ đó , có: $C(x) = \int f(x)\, e^{-\int p(x)dx}\, dx \quad C_1$

Vậy : $y = e^{-\int p(x)dx}\,[\int p(x)\, e^{-\int p(x)dx} + C_1]$ (15)

Công thức (15) nói chung khó nhớ, nên tốt nhất là cần nhớ các bước tính toán của phương pháp biến thiên hằng số để lặp lại.

-

Thí dụ 8: Giải phương trình: y’ – y.cotg x = 2x.sinx

Phương trình thuần nhất có nghiệm: $y = C\, e^{\int \cot g x dx} = C \sin x$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất ở dạng: y = C(x). sin x

Thế vào phương trình ban đầu, ta được :

C’(x) sin x + C(x) cos x – C(x) cos x = 2x sin x

C’(x) = 2x ➔ C(x) = x^2 + C

Vậy : y = x^2 sin x + C sin x

<u>Thí dụ 9</u>: Giải phương trình: xy’ – 3y = x^2

Đưa về dạng chuẩn : $y' - \frac{3y}{x} = x$

Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất :

$$y = Ce^{3\int\frac{dx}{x}} = Ce^{3\ln|x|} = Cx^3$$

Tìm nghiệm ở dạng y = C(x) x^3. Thế vào phương trình ban đầu ta có : C’(x)x^3 + 3C(x) x^2 – 3C(x) x^2 = x

$$C'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow C(x) = 1\frac{1}{x} + C$$

Vậy : $y = \left(-\frac{1}{x} + C\right)x^3 = x^3 - x^2$

<u>Chú ý:</u> Nếu coi x là hàm số theo biến y thì phương trình tuyến tính đối với hàm số x có dạng : $\frac{dx1}{dy} + p(y)x = f(y)$

<u>Thí dụ 10</u>: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

Phương trình này không tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x là hàm, y là biến ta có :

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$$

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y$$

Đây lại là phương trình vi phân tuyến tính đối với hàm x. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng :

$$x = Ce^{\int \cos y\,dy} = Ce^{\sin y}$$

Tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dạng : $x = C(y)e^{\sin y}$, đưa vào phương trình ban đầu, có :

$$C'(y)e^{\sin y} + C(y)e^{\sin y}.\cos y - C(y)e^{\sin y}.\cos y = \sin 2y$$
$$C'(y) = e^{-\sin y}\sin 2y$$
$$C(y) = \int e^{-\sin y}\sin 2y\,dy = 2\int e^{-\sin y}\sin y\,d\sin y$$
$$C(y) = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C$$

Vậy : x = C esiny – 2siny – 2

5. Phương trình Bernoulli

a). Là phương trình vi phân có dạng : y' + p(x) y = f(x) yα , α ≠ 1 (16)

b). Cách giải : Đưa về dạng : $y^{-\alpha}$ y' + p(x) $y^{1-\alpha}$ = f(x)

Đặt z = $y^{1-\alpha}$, ta được z' = (1-α) $y^{-\alpha}$ y', nên phương trình (16) có dạng tuyến tính :

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = f(x)$$

hay là : z' + (1 - α)P(x) z = (1-α)f(x)

Thí dụ 11: Giải phương trình: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$

Đây là phương trình Bernoulli với α = ½ . Chia 2 vế cho $\sqrt{y}$ ta được :

Thí dụ 12: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

Phương trình này không tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x là hàm, y là biến ta có :

$$y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

Đặt $z = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, thế vào phương trình trên, ta có: $2z' - \frac{4}{x}z = x, \quad z' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng bằng :

$$z = Ce^{\int \frac{2dx}{x}} = Ce^{2\ln|x|} = Cx^2$$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dạng : $z = C(x).\, x^2$

Thế vào ta có :

$$C'(x)x^2 + 2x\,C(x) - \frac{2}{x}C(x)x^2 = \frac{x}{2}$$
$$C'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$
$$\Rightarrow z = Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x| = \sqrt{y}$$

III. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI GIẢM CẤP ĐƯỢC

1. Các khái niệm cơ bản về phương trình cấp hai

1.1. Phương trình vi phân cấp hai có dạng :

F(x,y,y’,y’’) = 0 hay y’’=f(x,y,y’)

Bài toán Cauchy của phương trình vi phân cấp hai là tìm nghiệm của phương trình trên thỏa điều kiện đầu : y(xo) = yo ,
y’(xo) = y'_o

Thí dụ 1: Giải phương trình :

y’’ = x + cosx, biết y(0) = 1 , y’(0) = 3

Ta có:

$$y' = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1$$
$$y = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1x + C_2$$

Cho x =0 , y =1 => C_2 =1. Cho y’(0) = 3, ta có C_1 = 3. Vậy nghiệm bài toán là :

$$y = \frac{x^3}{6} - \cos x + 3x + 1$$

Thí dụ 1 trên cho thấy phương trình vi phân cấp thường phụ thuộc vào hai tham số C_1, C_2, và chúng được xác định nhờ hai
điều kiện đầu.

1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm bài toán Cauchy

Bài toán: y''= f(x,y,y') (1)

y(xo) = yo , y'(xo) = y'_o (2)

Nếu f(x,y,y') (theo 3 biến x, y, y') và các đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong miền 3 chiều Ω , và (xo,yo, y'_o) là một điểm trong Ω . Khi đó bài toán Cauchy có duy nhất một nghiệm y = φ (x) xác định liên tục, hai lần khả vi trên một khoảng (a,b) chứa xo

Hàm số phụ thuộc hai hằng số y = φ (x,C_1, C_2) gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai (trong miền Ω) nếu nó thỏa phương trình vi phân cấp hai với mọi hằng số C_1, C_2 (thuộc một tập hợp nào đó) và ngược lại với mọi điểm (xo,yo, y'_o) trong Ω đều tại tại duy nhất Co_1, Co_2 sao cho y = φ (x, Co_1, Co_2) là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện đầu.

Như vậy từ nghiệm tổng quát y = φ (x,C_1, C_2) cho các giá trị cụ thể C_1=C_1', C_2=C_2' ta có nghiệm riêng: y = φ (x,C_1', C_2')

<u>Lưu ý:</u> Nếu nghiệm tổng quát tìm ra ở dạng ẩn Φ (x,y,C_1,C_2) = 0 thì nghiệm riêng cũng ở dạng ẩn Φ (x,y,C_1', C_2') = 0

2. Phương trình cấp hai giảm cấp □ược

Phương trình có dạng : y'' = f(x)

Dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình này sau hai lần lấy tích phân

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$
$$y = \int\left[\int f(x)dx\right] + C_1x + C_2$$

<u>Thí dụ 2</u>: Giải phương trình vi phân: y''= sin x cos x + ex

Ta có :

$$y' = \int \sin x \cos x dx + \int e^x dx + C_1$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2} + e^x + C_1$$
$$y = \int \frac{\sin^2 x}{2} dx + \int e^x dx + \int C_1 dx + C_2$$
$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{2} dx + e^x + C_1x + C_2$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + e^x + C_1x + C_2$$

3. Phương trình khuyết y

Phương trình có dạng : F(x,y’,y’’) = 0

Cách giải : Đặt p =y’ ta có phương vi phân cấp một F(x,p,p’) = 0, giải ra tìm p = φ (x,C1) và khi đó :

$$y=\int y'dx \quad \int \varphi(x,C_1)dx \quad + C_2$$

Thí dụ 3: Giải phương trình: xy’’ + y’ = x^2

Đặt p = y’ → p’=y’’, ta có : $xp'+p=x^2\ ,\ p'+\frac{1}{x}p=x$

đây là phương trình vi phân tuyến tính. Giải ra ta được : $p=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$

Qua đó, ta có: $$y'=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x} \rightarrow$$ $$y=\frac{x^3}{9}+C_1\ln|x|+C_2$$

4. Phương trình khuyết x

Phương trình có dạng : F(y,y’,y’’) = 0

Cách giải : Đặt p =y’, và coi y là biến, và p là hàm số theo biến y. Ta có :

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

Như vậy ta có phương trình dạng cấp 1: $F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0$

Thí dụ 4: Giải bài toán Cauchy:

yy’’ + y'^2 = 0, y(1) =2 , y’(1) = ½

Đặt $y'=p,\ \ y''=p\frac{dp}{dy}$, ta được :

$$y\left(p\frac{dp}{dy}\right)+p^2=0$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy}+p\right)=0$$

Từ đây có 2 trường hợp:

- p = 0 , nghĩa là y’ =0. Nghiệm này không thỏa điều kiện đầu, bỏ
- $y\frac{dp}{dy}+p=0 \rightarrow ydp+pdy=0$ d(py) = 0 → yp = C_1

Vậy ydx = C_1

Khi x = 1 , y =2, y’= ½ cho nên : $2\frac{1}{2}=C_1 \rightarrow C_1=1$

Ta có: $y\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \frac{1}{2}y^2=x+C_2$

Cho x= 1, y =2 ta được C_2= 1.

Tóm lại nghiệm phải tìm là: $\frac{1}{2}y^2=x+1$

IV. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP HAI

1. Khái niệm chung

1.1. Phương trình tuyến tính cấp hai có dạng :

y’’+ p(x)y’ + q(x)y = f(x) (1)

với các hàm số p(x), q(x), f(x) xác định và liên tục trên khoảng (a,b). Khi ấy với mọi xo ∈ (a,b) và mọi giá trị yo, y'_o ta có bài toán Cauchy điều kiện đầu : y(xo) = yo, y’(xo) = y'_o

có nghiệm duy nhất trên (a,b)

Phương trình y’’+ p(x)y’ + q(x)y = 0 (2)

Được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng của phương trình (1)

1.2. Định lý 1: (Về nghiệm tổng quát của Phương trình không thuần nhất)

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) có dạng : y = yo + yr

trong đó yo là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2) và yr là 1 nghiệm riêng nào đó của phương trình (1)

2. Phương trình thuần nhất, nghiệm tổng quát

2.1. Định lý 2:

Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2)

Chứng minh: Thật vậy, ta có :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = [C_1y_1'' + C_2y_2''] + p(x)\,[C_1y_1' + C_2y_2']y1' + q(x)\,[C_1y_1 + C_2y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = 0 + 0 = 0$$

(do $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của (2) nên biểu thức trong [] của biểu thức cuối bằng 0)

Vậy $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là 1 nghiệm của (2)

2.2. Định nghĩa:

Các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên khoảng (a,b) nếu không tồn tại các hằng số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho :

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0 \text{ trên } (a,b)$$

(Điều này tương đương với : $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$ trên (a,b))

Thí dụ 1:

+ Các hàm $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ là độc lập tuyến tính

+ Các hàm $y_1(x)$= ex, $y_2(x)$= 3 ex là phụ thuộc tuyến tính

2.3. Định lý 3:

Xem các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất (2). Khi đó chúng độc lập tuyến tính với nhau khi và chỉ khi định thức sau khác không :

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

(định thức trên gọi là định thức Vronski)

2.4. Định lý 4: (Cấu trúc nghiệm của phương trình thuần nhất)

Nếu các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (2), thì:

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với các hằng số bất kỳ C_1, C_2 sẽ là nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Thí dụ 2: Chứng tỏ rằng phương trình $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = C_1e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Thật vậy, kiểm tra trực tiếp dễ thấy rằng $y_1 = e^{2x}$ và $y_2 = e^{-2x}$ là các nghiệm của phương trình trên. Mặt khác, $\frac{y_1}{y_2} = e^{4x} \neq const$ nên chúng độc lập tuyến tính. Vậy: $y = C_1e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

là nghiệm tổng quát của phương trình trên.

2.5. Biết một nghiệm của (2), tìm nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với nó

Giả sử $y_1(x)$, là một nghiệm của phương trình thuần nhất (2). Khi đó có thể tìm nghiệm thứ 2 độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ ở dạng : $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$, trong đó $u(x) \neq$ const .

Thí dụ 3: Biết phương trình $y'' - 2y' + y = 0$ có 1 nghiệm $y_1 = ex$. Tìm nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với $y_1(x)$.

Việc kiểm tra lại $y_1 = ex$ là 1 nghiệm là dễ dàng. Tìm $y_2(x) = u(x)\, ex$

$\rightarrow y'_2 = ex\, u + ex\, u'$, $y''_2 = ex\, u + 2ex\, u' + 2ex\, u''$

Thay vào phương trình đã cho, có :

$ex\,(u'' + 2u' + u) - 2ex\,(u + u') + ex\, u = 0$

$\rightarrow 2ex\, u'' = 0$, $u'' = 0$, $u = C_1x + C_2$

Vì cần $u \neq$ const, nên có thể lấy $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, nghĩa là $u = x$, $y_2 = x\, ex$

Nghiệm tổng quát có dạng : $y = C_1ex + C_2x\ ex$

3. Phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng

Để giải phương trình không thuần nhất cần phải biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất mà ta vừa tìm hiểu ở mục 2. Ngoài ra còn cần tìm 1 nghiệm riêng của nó và có thể tìm ở dạng giống như nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, tức là ở dạng: $y = C_1y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ (3)

trong đó $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính, nhưng xem C_1, C_2 là các hàm số $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Để dễ tìm $C_1(x)$, $C_2(x)$ ta đưa thêm điều kiện :

$C'_1(x)\,y_1(x) + C'_2(x)\,y_2(x) = 0$ (4)

Với điều kiện (4), lấy đạo hàm (3), ta được:

$y' = C_1y'_1(x) + C_2\,y'_2(x)$ (5)

$y'' = C_1y_1''(\,x) + C_2\,y_2''(x) + C'_1y'_1(x) + C'_2\,y'_2(x)$ (6)

Thay (3), (5),(6) vào (1), có :

$C_1y_1''(\,x) + C_2\,y_2''(x) + C'_1y'_1(x) + C'_2\,y'_2(x) + p[C_1y'_1(x) + C_2\,y'_2(x)\,] +$
$q[C_1y_1(x) + C_2\,y_2(x)\,] = f(x)$

Hay:

$C_1[\,y_1''(\,x) + pC_1y'_1(x) + qC_1y_1(x)\,]\,C_2[\,y_2''(x) + py'_2(x) + q\,y_2(x)\,] +$
$C'_1y'_1(x) + C'_2\,y'_2(x) = f(x)$

Do y_1, y_2 là nghiệm của (1) nên suy ra:

$C'_1y'_1(x) + C'_2\,y'_2(x) = f(x)$ (7)

Như vậy C'_1 , C'_2 thỏa hệ :

$$\begin{cases} C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = f(x) \\ C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0 \end{cases}$$

-

<u>Thí dụ 4</u>: Giải phương trình $x^2y'' + xy' - y = x^2$

Đưa về dạng chính tắc : $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 1$

Trước hết xét phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Có thể tìm được 1 nghiệm của nó là $y_1 = x$. Nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với nó có dạng : $y_2 = xu(x)$

$\rightarrow y'_2 = u + xu'$, $y''_2 = 2u' + xu''$

thế vào phương trình thuần nhất, được :

$$2u' + xu'' + \frac{1}{x}(u + xu') - \frac{1}{x^2}xu = 0$$
$$\rightarrow xu'' + 3u' = 0$$

Đây là phương trình cấp hai giảm cấp được bằng cách đặt $p = u'$ ta được :

$$xp' + 3p = 0\ ,\quad p' + \frac{3}{x}p = 0$$
$$p = Ce^{-\int\frac{3dx}{x}} = \frac{C}{x^3}$$

Cho nên : $u' = \dfrac{C}{x^3}\ ;\quad u = \dfrac{C_1}{x^2}$

Do $u \neq const$ và chỉ cần 1 nghiệm nên chọn $C_1=1$, nên $u = \dfrac{1}{x^2}, y_2 = \dfrac{1}{x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng : $y = C_1x + C_2\dfrac{1}{x}$

Việc còn lại là cần tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất bằng phương pháp biên thiên hằng số, dạng :

$$y = C_1(x)x + C_2(x)\frac{1}{x}$$

Với C_1, C_2 thỏa :

$$\begin{cases} C_1' + C_2'\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ C_1'x + C_2'\dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{x}{2} \qquad C_2' = -\frac{x^3}{2}$$

$$\to \quad C_1 = \frac{x^2}{4} + c_1 \,, \quad C_2 = -\frac{x^4}{8} + c_2$$

Vì chỉ cần chọn 1 nghiệm riêng, nên có thể chọn cụ thể $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. vậy

$C_1 = \frac{x^2}{4}$, $C_2 = -\frac{x^4}{8}$, cho nên :

$$y_r = \frac{x^2}{4}x - \frac{x^4}{8}\frac{1}{x} = \frac{x^3}{8}$$

và như vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là :

$$y = \frac{x^3}{8} + C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

<u>Lưu ý:</u> Nếu vế phải của phương trình vi phân có dạng tổng của 2 hàm số $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, thì khi đó có thể giải phương trình với riêng vế phải là từng hàm $f_1(x)$, $f_2(x)$ để tìm nghiệm riêng là yr_1, yr_2. Cuối cùng dễ kiểm lại là: nghiệm riêng của phương trình ban đầu là $yr = yr_1, yr_2$ (theo nguyên lý chồng chất nghiệm).

V. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

1. Khái niệm chung

$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots\ldots + any = f(x)$ (1)

trong đó $a_1, a_2, \ldots\ldots$, an là các hằng số

Trong phần sau ta trình bày kỹ phương trình cấp hai.

2. Phương trình cấp hai thuần nhất

Xét phương trình : y’’ + py’ + qy = f(x) (2)

trong đó p, q là hằng số

Ta tìm nghiệm của nó ở dạng : y = ekx (3)

Thế (3) vào (2) ta có: $(k^2 + pk + q)$ ekx = 0

→ $(k^2 + pk + q) = 0$ (4)

Phương trình (4) gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (2), và cũng từ (4) cho thấy y = ekx là nghiệm của (2) khi và chỉ khi k là nghiệm của (4). Do đó dựa vào việc giải phương trình bậc 2 này, ta có các khả năng sau:

a). Phương trình đặc trưng (4) có 2 nghiệm phân biệt k_1,k_2 ($\Delta > 0$): Khi đó 2 nghiệm $y_1 = ek^{1x}$, $y_2 = ek^{2x}$ là 2 nghiệm riêng của (2), và $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq const$ nên 2 nghiệm riêng này độc lập tuyến tính. Vậy khi đó nghiệm tổng quát của (2) sẽ là: $y = C_1ek^{1x} + C_2ek^{2x}$

b). Phương trình đặc trưng (4) có 1 nghiệm kép k ($\Delta = 0$). Khi đó nghiệm y_1 = ekx là 1 nghiệm riêng của (2), và nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với nó có dạng y = $u(x).y_1 = u(x)$.ekx

$y_2' = k.ekx . u(x) + u'(x).ekx$

$y_2'' = k^2.ekx.u(x) + 2ku'(x).ekx + ekx.u(x)''$

Thế vào phương trình (2) ta có :

$(k^2.u + 2ku' + u'')\, ekx + p(ku + u')\, ekx + q\, ekxu = 0$

$\rightarrow u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)u = 0$

Do k là nghiệm kép của (4) nên :

$k = -p/2 \rightarrow 2k + p = 0$ và $(k^2 + pk + q) = 0$

từ đó : $u'' = 0 \rightarrow u = C_1x + C_2$

Do chỉ cần chọn 1 nghiệm nên lấy $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, và như thế có : y_2 = x ekx

Và nghiệm tổng quát của (2) là: $y = (C_1 + C_2x)$ ekx

c). Phương trình đặc trưng (4) có 2 nghiệm phức liên hiệp $k_{1,2} = \alpha \pm \beta$, $\beta \neq 0$ ($\Delta < 0$). Khi đó 2 nghiệm của (2) có dạng :

$$\overline{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\overline{y}_2 = e^{(\alpha i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Khi đó :

$$y_1 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad ; \quad y_2 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

cũng là 2 nghiệm của (2) và $\frac{y_1}{y_2} = \cot g\beta \neq const$ nên chúng độc lập tuyến tính.

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của (2) là : $y = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e\alpha^{x}$

<u>Thí dụ 1</u>: Giải phương trình : y'' + 3y' – 4y = 0

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 3k - 4 = 0 \rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -4$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là : $y = C_1ex + C_2e^{-4x}$

-

<u>Thí dụ 2</u>: Giải phương trình : y'' + 4y' + 4y = 0

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là : $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

-

<u>Thí dụ 3</u>: Giải phương trình : y'' + 6y' + 13y = 0

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 6k + 13 = 0 \rightarrow k_{1,2} = -3 \pm 2i$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-3x}$

3. Phương trình cấp hai không thuần nhất vế phải có dạng ặc biệt

Xét phương trình vi phân cấp hai hệ số hằng không thuần nhất :

y'' + py' + qy = f(x) (5)

Qua việc trình bày tìm nghiệm tổng quát của phương trình cấp hai thuần nhất tương ứng, và dựa vào định lý 2, mục II.1 ?? thì để có nghiệm tổng quát của (5) ta cần tìm được 1 nghiệm riêng của (5).

Ngoài phương pháp biến thiên hằng số đã trình bày, dưới đây trình bày phương pháp hệ số bất định để tìm một nghiệm riêng cho (5) khi vế phải có dạng đặc biệt thường gặp.

3.1 Vế phải $f(x) = e\alpha^{x} Pn(x)$

trong đó Pn(x) là đa thức cấp n, α là một số thực.

Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (5) ở dạng: yr = u(x) Qn(x) (6)

với Qn(x) là đa thức cấp n có (n+1) hệ số được xác định bằng cách thay (6) vào (5) và đồng nhất 2 vế ta có (n+1) phương trình đại số tuyến tính để tìm (n+1) hệ số. Hàm u(x) có dạng cụ thể là :

a). Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (4), $u(x) = xe\alpha^{x}$ và khi đó: $yr = xe\alpha^{x} Qn(x)$

b). Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (4), $u(x) = x^2e\alpha^{x}$ và khi đó: $yr = x^2e\alpha^{x} Qn(x)$

c). Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (4), $u(x) = e\alpha^{x}$ và khi đó: $yr = e\alpha^{x} Qn(x)$

Thí dụ 4: Giải phương trình : $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 - 4k + 3 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1$, $k_2 = 3$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $y = C_1ex + C_2e^{3x}$

Mặt khác số α = 2 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng tìm ở dạng $yr = Ae^{2x}$ (do Pn(x) =3 đa thức bậc 0), thay vào phương trình đã cho có:

$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \rightarrow A = -3$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là :

$y = C_1ex + C_2e^{3x} - 3e^{2x}$

-

Thí dụ 5: Giải phương trình : $y'' + y = xex + 3e^{-x}$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \pm i^2$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $yo = C_1\cos x\ C_2 \sin x$

Do vế phải là tổng của 2 hàm $f_1 = xex$, $f_2 = 2e^{-x}$ nên ta lần lượt tìm nghiệm riêng của phương trình lần lượt ứng với vế phải là f_1, và f_2 :

+ Với f_1 = xex thì α = 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng , Pn(x) = x nên nghiệm riêng có dạng : yr_1 = (Ax+B)ex

+ Với $f_2 = 2e^{-x}$ thì α = -1 cũng không là nghiệm của phương trình đặc trưng , Pn(x) = 2 nên nghiệm riêng có dạng : $yr_2 = Ce^{-x}$

Theo nguyên lý xếp chồng, nghiệm riêng của phương trình đã cho được tìm ở dạng : yr = (Ax+B)ex + Ce^{-x}

→ yr ' = (Ax+B)ex - Ce^{-x} + Aex

→ yr'' = (Ax+B)ex + Ce^{-x} + 2Aex

Thế vào phương trình đã cho, có :

2Axex + (2A+2B)ex + $2Ce^{-x}$ = xex + $2e^{-x}$

Từ đó, ta có : 2A =1, 2A + 2B = 0 , 2C =2

→ $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

3.2. Vế phải f(x) = eα ^{x} [Pn(x) cos β x +Qm(x) sin β x]

Trong đó Pn(x), Qm(x) là đa thức bậc n, m tương ứng, α , β là các số thực.

Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (5) ở dạng:

yr = u(x) [Rs(x) cos β x + Hs(x) sin β x] (7)

(β = 0 sẽ tương ứng trường hợp đã nêu ở trên), với s = max {m,n}, Rs(x), Hs(x) là đa thức bậc s với 2(s+1) được xác định bằng cách thay (7) vào (5) và đồng nhất 2 vế ta có các phương trình đại số tuyến tính để tìm các hệ số. Hàm u(x) có dạng cụ thể là :

a). Nếu $\alpha \pm \beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng tương ứng, u(x) = eα ^{x} và khi đó yr = eα ^{x} [Rs(x) cos β x + Hs(x) sin β x]

b). Nếu $\alpha \pm \beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng tương ứng, u(x) = xeα ^{x} và khi đó :

yr = eα ^{x} [Rs(x) cos β x + Hs(x) sin β x]

Thí dụ 6: Giải phương trình : y'' + y = sin x

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 1 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = \pm i^2$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $yo = C_1 \cos x\ C_2 \sin x$

Ở đây $\alpha = 0$, $\beta = 1$, nên $\alpha \pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Mặt khác, do n =m=0, cho nên s = 0. Vậy nghiệm tổng quát được tìm ở dạng: yr = x(Acosx+Bsinx)

→ yr' = x(-Asinx + Bcosx) + (Acosx+Bsinx)

→ yr'' = 2(-Asinx + Bcosx) + x(-Acosx - Bsinx)

→ yr' + yr = -2Asinx + 2Bcosx = sinx

→ -2A = 1, 2B =0 → A= -1/2 , B = 0

Vậy nghiệm riêng là : $y_r = -\frac{x}{2}\cos x$

Và nghiệm tổng quát là : $y = -\frac{x}{2}\cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

I. Chứng tỏ rằng hàm số y = f(x) là nghiệm của phương trình vi phân tương ứng

1) $xy'' - y' = 0$ $y = x^2$; $y = 1$; $y = c_1x^2 + c_2$

2) $y' + \frac{1}{x}y = 1$

a) $y = \frac{x}{2}$; b) $y\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$; c) $y = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}$

3) $x^2y' + xy = ex$, $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$

4) $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$

a) $y = 1$;

b) b) $y = tgx$

II. Giải các phương trình vi phân sau:

1. $x(y^2 - 1)dx - (x^2 + 1)ydx = 0$
2. $(x^2 - xy)dx - (y^2 + x^2)dy = 0$
3. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$
4. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$
5. $y = xy' + y'\ln y$
6. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$
7. $xy' = 2(x - \sqrt{xy})$
8. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$
9. $y' = 2^{x-y}$, $y(-3) = (-5)$
10. $y' = ex^{+y} + ex^{-y}$, $y(0) = 0$

11. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$

12. $y'\cos^2 x + y = tgx$

13. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$

14. $y'\cos x + y = 1 - \sin x$

15. $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$ (coi x là hàm số)

16. $(y^4 + 2x)y' = y$ (coi x là hàm số)

17. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$

18. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$ (coi x là hàm số)

III. Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau:

1) $y'' + y' = 0$

2) $y'' + yy' = 0$

3) $y'' = (y')^2$

4) $2(y')^2 = (y - 1)y''$

5) $y''^2 = 1 + y'^2$

6) $y'' = y'ey$

7) $(y + y')y'' + y'^2 = 0$

8) $3y'^2 = 4yy'' + y'^2$

9) $yy'' - y'^2 = y^2\ln y$

IV. Giải các bài toán Cauchy sau:

1) $xy'' + y' = 0$, $y(1) = -3$, $y'(1) = 2$

2) $2y'' + y'^2 = -1$, $y(-1) = 2$, $y'(1) = 0$

3) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$. $y'(0) = 3$

4) $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

5) y’’ + $\frac{1}{y^2}e^{y^2}y'-2yy'^2=0$

6) $(-\frac{1}{2e})=1,\qquad y'(-\frac{1}{2e})=e$

7) Cho phương trình $m\frac{d^2r}{dt^2}=-\gamma\frac{Mm}{r^2}$, r(0) = R, r’(0) = vo

Xác định vo để khi t --> ∞ thì r --> ∞

(bài toán tìm vận tốc vũ trụ cấp hai)

V. Phương trình tuyến tính cấp hai

1)Các hàm sau có độc lập tuyến tính hay không:

a) (x + 1) và (x^2 – 1)

b) x và (2x + 1)

c) lnx và $\ln x^2$

2) Giải phương trình khi biết một nghiệm là y_1

a) y’’ + y = 0 , biết y_1 = cosx

b) x^2y’’ – 2y = 0, biết $y_1 = x^2$

c) y’’ – y’ – 2y = 0, biết $y_1 = e^{-x}$

d) $4x^2$y’’ + y = 0, x > 0, biết $y_1 = \sqrt{x}$

e) x^2y’’ - 5xy’ + 9y = 0, biết $y_1 = x^3$

f) (1-x^2)y’’ – 2xy’ + 2y = 0, biết y_1 = x

3) Tìm nghiệm tổng quát phương trình :

xy’’ – (2x + 1)y’ + (x + 1)y = 0

4) Giải phương trình: xy’’ + y’ = x^2

5) Giải phương trình: y’’ + $\frac{2}{x}y'+y=\frac{\cot gx}{x}$

Biết một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là : $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

VI. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Giải các phương trình sau:

1) y’’ - 2y’ – 3y = 0

2) y’’ + 25y = 0

3) y’’ – 2y’ +10y = 0, $y(\frac{\pi}{6}) = 0, y'(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}$

4) y’’ + y’ = 0, y(0) = 1, y’$(\pi/3) = 0$

5) y’’ - 10y’ + 25y = 0, y(0) = 0, y’(0) = 1

6) y’’ -2y’ -3y = e^{4x}

7) y’’ + y’ -2y = cosx – 3sinx

8) y’’ – 6y’ + 8y = $3x^2$ +2x +1

9) y’’ + 4y = sin2x + 1 , y(0) = $\frac{1}{4}, y'(0) = 0$

10) y’’ – y = x.$\cos^2$x

11) y’’ – 2y’ + 2y = exsinx

12) y’’ + y = tgx

13) y’’ + 4y = cos2x, y(0) = y$(\frac{\pi}{4}) = 0$

14) y’’ + 5y’ + 6y = $\frac{1}{1+e^{2x}}$