BÀI 2
TÍCH PHÂN BỘI BA

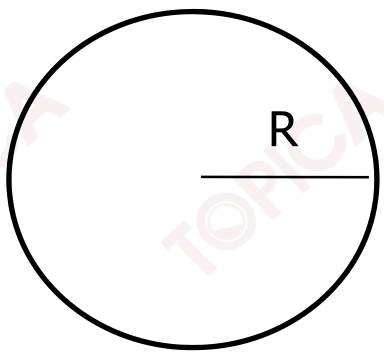
Giảng viên: ThS. Nguyễn Hải Sơn

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

THỂ TÍCH CỦA HÌNH ELIPSOID

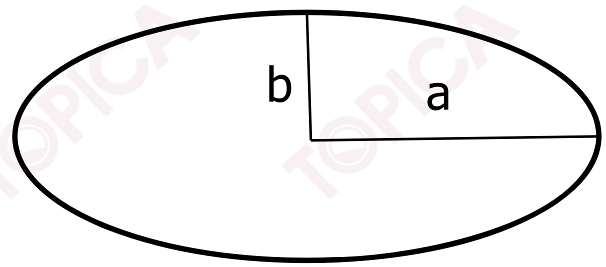
Thể tích của hình cầu bán kính R

Diện tích của hình tròn bán kính R:



$$S = \pi R^2$$

Diện tích của hình elip có độ dài các bán trục là a và b



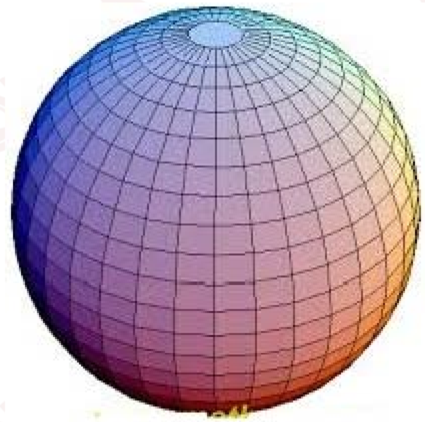
$$S = \pi ab$$

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI (tiếp theo)

THỂ TÍCH CỦA HÌNH ELIPSOID

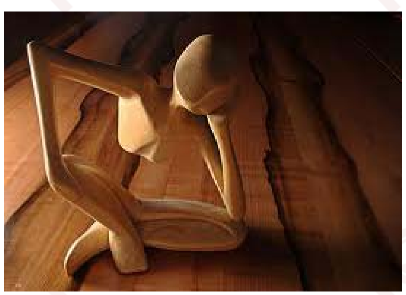
Thể tích của hình cầu bán kính R

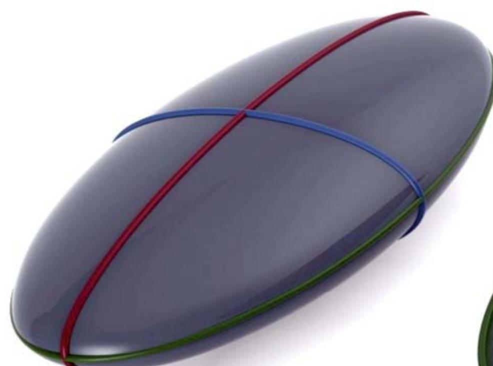
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

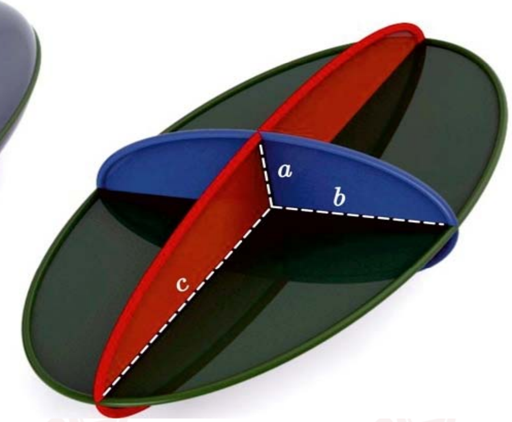


Thể tích của elipsoid có các bán trục là a, b, c

$$V = \ldots$$







MỤC TIÊU BÀI HỌC

Sau khi học xong bài này, sinh viên có thể:

- Trình bày được khái niệm tích phân bội ba và các ứng dụng của nó, thấy được tích phân bội ba là sự phát triển tự nhiên của tích phân kép.
- Vận dụng được các kĩ thuật tính tích phân bội ba và làm được các bài tập liên quan đến tích phân bội ba.

CÁC KIẾN THỨC CẦN CÓ

- Giống như đối với tích phân kép, sinh viên cần có các kiến thức cơ bản về giải tích, đặc biệt là phép tính tích phân hàm một biến số.
- Bên cạnh đó, sinh viên cũng cần có các kiến thức về hình học phẳng, hình học không gian.

HƯỚNG DẪN HỌC

- Xem bài giảng đầy đủ và tóm tắt những nội dung chính của từng bài.
- Tích cực thảo luận trên diễn đàn và đặt câu hỏi ngay nếu có thắc mắc.
- Làm bài tập và luyện thi trắc nghiệm theo yêu cầu từng bài.

CẤU TRÚC NỘI DUNG

1. Định nghĩa – Tính chất
2. Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề các
3. Phép đổi biến số trong tích phân bội ba
4. Ứng dụng của tích phân bội ba

1. ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT

1.1. Định nghĩa tích phân bội ba

1.2. Tính chất

1.1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN BỘI BA

- f = f(x,y,z) xác định trên vật thể đóng, bị chặn Ω
- Chia Ω một cách tùy ý ra thành n khối nhỏ: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$.
- Thể tích tương ứng mỗi khối $V(\Omega_1), V(\Omega_2), ..., V(\Omega_n)$.
- Trên mỗi khối Ω_i lấy tuỳ ý một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$.
- Lập tổng tích phân: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot V(\Omega_i)$
- Cho $n \to +\infty$ sao cho $\underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{Max}}\{d_i\} \xrightarrow{\Omega} 0$, nếu $I_n \to I$ xác định không phụ thuộc

  cách chia miền Ω, và cách lấy điểm M_i thì I được gọi là tích phân bội ba của f=f(x,y,z) trên khối.

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

- Khi đó, f gọi là khả tích trên Ω

1.1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN BỘI BA (tiếp theo)

- Nhận xét: Thể tích vật thể Ω là

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

- Định lý: Nếu Ω là một miền đóng, bị chặn, có biên trơn từng mảng và f(x,y,z) liên tục trên Ω thì f(x,y,z) khả tích trên .

1.2. TÍNH CHẤT

1. $V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dxdydz$

2. $\iiint\limits_\Omega \alpha \cdot f(x,y,z)dxdydz = \alpha\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$

3. $\iiint\limits_\Omega (f+g)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f dxdydz + \iiint\limits_\Omega g dxdydz$

4. Nếu Ω được chia làm hai khối Ω_1 và Ω_2 không dẫm lên nhau:

$$\iiint\limits_\Omega f dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f dxdydz$$

5. $\forall (x,y,z) \in \Omega, f(x,y,z) \le g(x,y,z) \Rightarrow \iiint\limits_\Omega f dxdydz \le \iiint\limits_\Omega g dxdydz$

2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

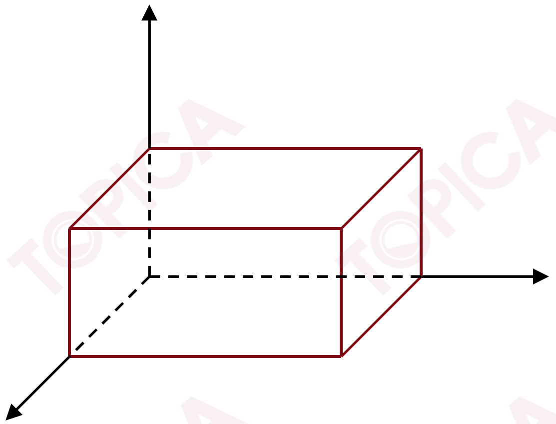
Cách tính: đưa về 3 tích phân xác định theo từng biến (tích phân lặp)

$\boxed{\text{Tích phân bội ba}} \Rightarrow \boxed{\text{Tích phân kép}} \Rightarrow \boxed{\text{Tích phân lặp}}$

Trường hợp miền Ω là hình hộp chữ nhật $\Omega: \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ m \le z \le n \end{cases}$

Khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x,y,z)dz}$$



2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

Ví dụ 1: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} xy^2 dxdydz$, với $\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 2 \\ 1 \le z \le 3 \end{cases}$

Ta có: $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_1^3 xy^2 dz = \int\limits_0^1 x dx . \int\limits_{-1}^2 y^2 dy . \int\limits_1^3 dz$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \cdot \left.\frac{y^2}{3}\right|_{-1}^2 \cdot \left.z\right|_1^3 \quad = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$$

2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

Trường hợp miền Ω xác định bởi $\Omega:\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$

$$\boxed{I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz}$$

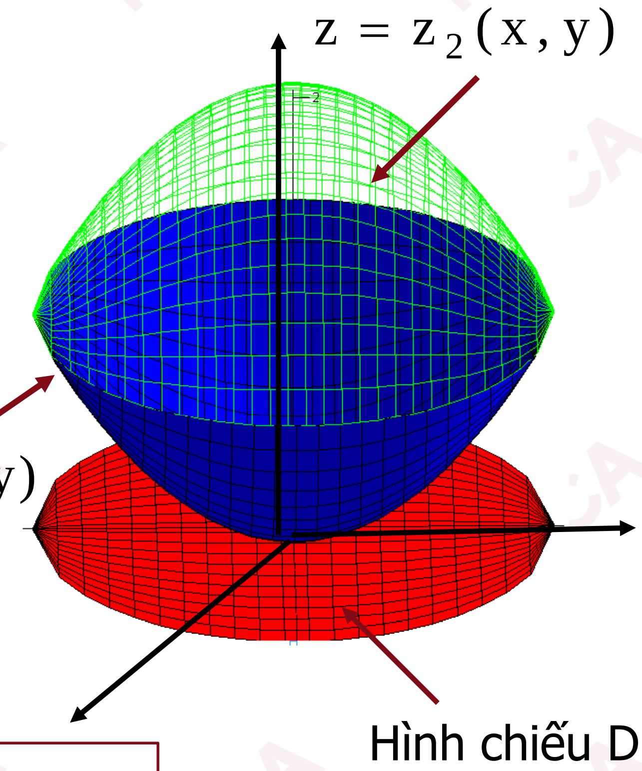
Ví dụ 2: Tính $I = \iiint_{\Omega} zdxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} y \le x \le y^2 \\ 1 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le xy \end{cases}$

Ta có:

$$I = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} dx \int_0^{xy} zdz = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} dx \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} \right) = \frac{1}{6}\int_1^2 \left(y^8 - y^5\right)dy = \frac{1}{6}\left[\frac{y^9}{9} - \frac{y^6}{6}\right]_1^2 = \ldots$$

2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

Trường hợp miền Ω được giới hạn bởi: Mặt dưới và mặt trên là các mặt $z = z_1(x,y)$ và $z = z_2(x,y)$, có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là miền D.



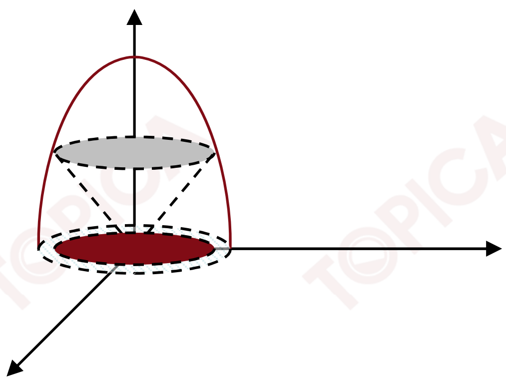
Khi đó

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

Ví dụ 3: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$, với Ω được giới hạn bởi $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Trước hết ta xác định giao tuyến của 2 mặt cong.



$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\ 2 - z^2 = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Vậy giao tuyến của 2 mặt cong là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

→ hình chiếu của Ω lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} dxdy\left[\left(2 - x^2 - y^2\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right] = \ldots = \frac{11}{12}\cdot\pi$$

2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

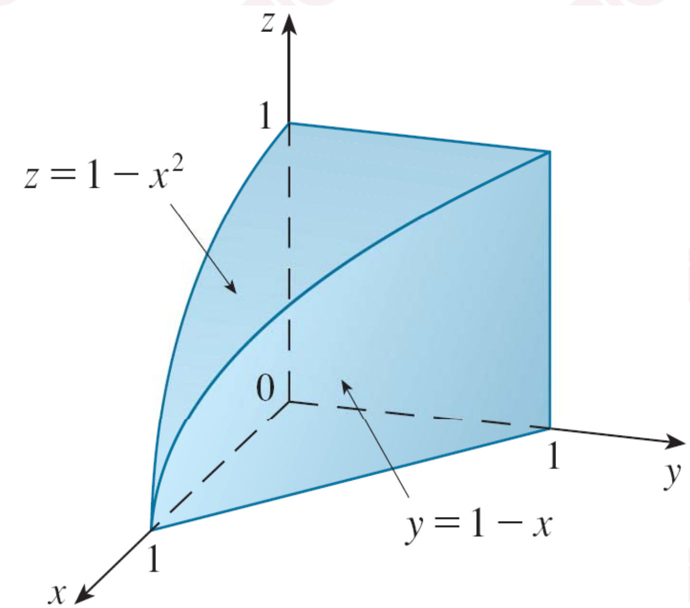
Ví dụ 4: Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi

$y = 1 - x, z = 1 - x^2$ và các mặt phẳng tọa độ, (phần $z \geq 0$)

Hình chiếu của V xuống 0xy: Tam giác OAB

Mặt phía trên: $z_2(x, y) = 1 - x^2$

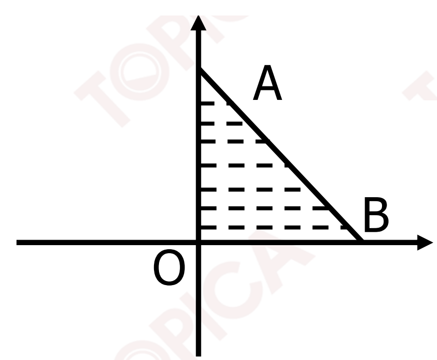
Mặt phía dưới: z=0



$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \left[\int_0^{1-x^2} z\,dz \right] dxdy$$

$$= \iint\limits_{\Delta OAB} \left[\frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x^2} \right] dxdy = \iint\limits_{\Delta OAB} \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{2} dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{2} dy = \frac{11}{60}$$



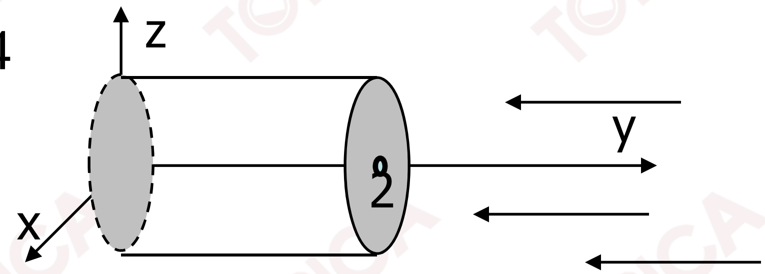
2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

Ví dụ 5: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdydz$, với $\Omega: \begin{cases} x^2 + z^2 \le 4 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Hình chiếu của V xuống 0xz là D: $x^2 + z^2 \le 4$

Mặt phía trên: y=2

Mặt phía dưới: y=0



$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D} dxdz \int\limits_{0}^{2} \sqrt{x^2 + z^2}\,dy = 2\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + z^2}\,dxdz$$

Đổi sang tọa độ cực, ta có

$$\Rightarrow I = 2\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} r^2 dr = \frac{32\pi}{3}$$

3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TÍCH PHÂN BỘI BA

3.1. Phép đổi biến số tổng quát

3.2. Phép đổi biến số trong tọa độ trụ

3.3. Phép đổi biến số trong tọa độ cầu

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT

Xét tích phân $$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

Đặt $$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

$$\Omega \leftrightarrow \Omega_1$$

Khi đó $$\boxed{I = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)).|J|\,dudvdw}$$

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT (tiếp theo)

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} 2dxdydz$ với $\Omega : \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = u \\ \dfrac{y}{2} = v \\ \dfrac{z}{1} = w \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_{\Omega} 2.6dudvdw = 12\left(\frac{1}{2}\right)V = \frac{12}{2}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) = 8\pi$$

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT (tiếp theo)

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

- Khi Ω là một miền đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ hoặc các trục tọa độ hoặc gốc O, ta có kết quả sau:

  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ với Ω_1, Ω_2 rời nhau.

  - Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua Oxy thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z)dxdydz & \text{khi } f(x,y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

  - Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua Oyz thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(-x,y,z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z)dxdydz & \text{khi } f(-x,y,z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT (tiếp theo)

- Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua Ozx thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(x,-y,z) = -f(x,y,z) \\ 2\displaystyle\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz & \text{khi } f(x,-y,z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

- Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua Ox thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(x,-y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\displaystyle\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz & \text{khi } f(x,-y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

- Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua Oy thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(-x,y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\displaystyle\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz & \text{khi } f(-x,y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT (tiếp theo)

- Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua Oz thì

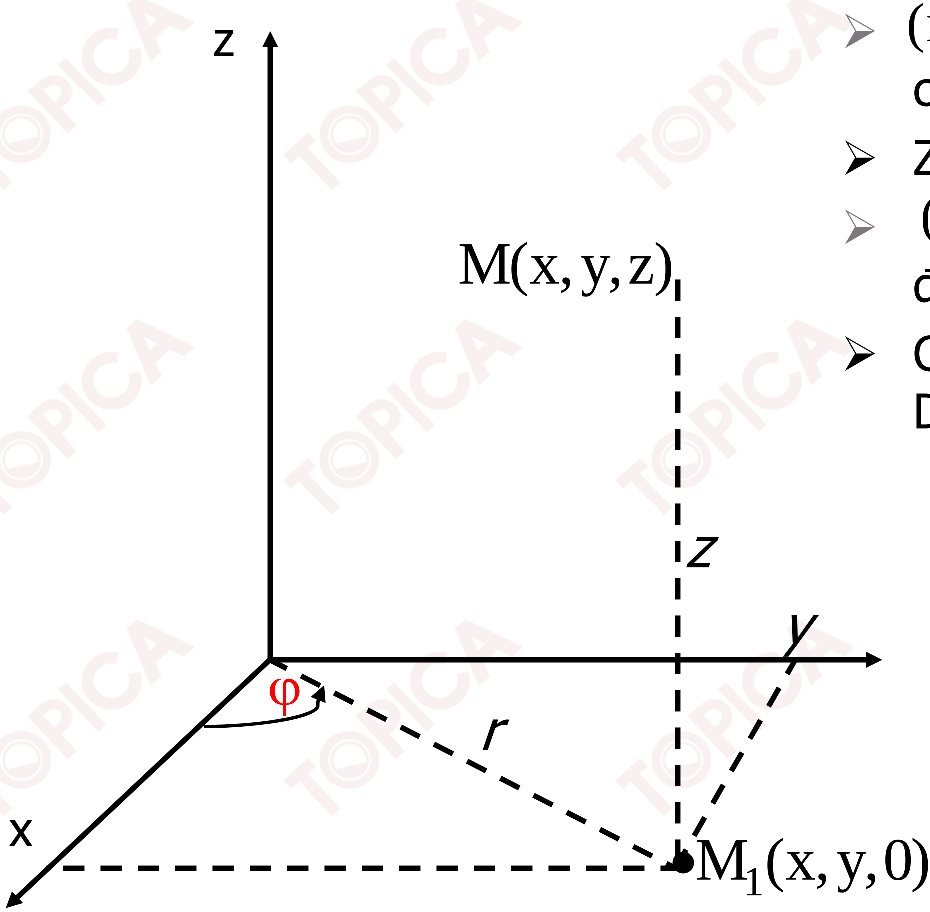
$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(-x,-y,z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dxdydz & \text{khi } f(-x,-y,z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

- Nếu Ω_1, Ω_2 đối xứng nhau qua gốc O thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dxdydz & \text{khi } f(-x,-y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

3.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ TRỤ

Tọa độ trụ



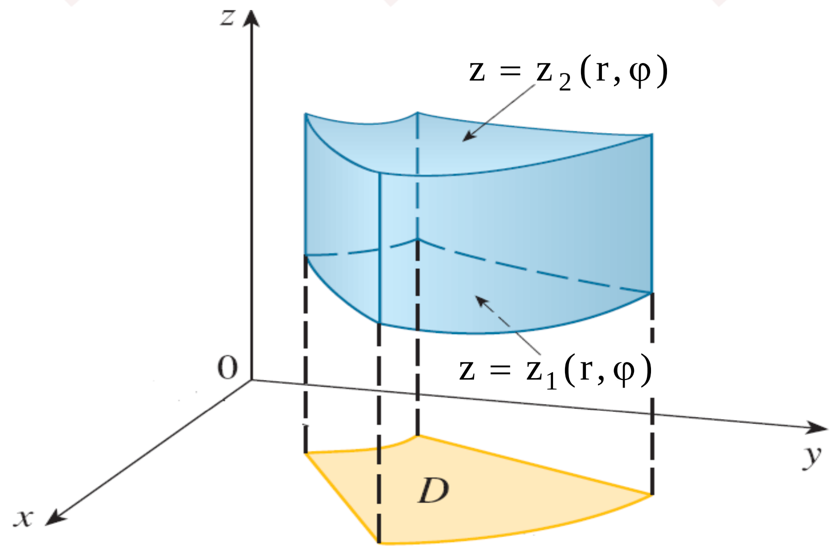
- Điểm M(x,y,z) trong hệ trục tọa độ 0xyz.
- M được xác định duy nhất bởi bộ (r, φ, z)
  - (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu M_1 của M lên Oxy.
  - Z là độ cao của M.
  - (r, φ, z) được gọi là tọa độ trụ của điểm M.
  - Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

3.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ TRỤ (tiếp theo)

Đổi biến số trong tọa độ trụ (khi Ω là hình trụ tròn hoặc trụ elip)

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$



Đặt $\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$

Jacobi j=r

Mặt phía dưới: $z = z_1(r,\varphi)$

Mặt phía trên: $z = z_2(r,\varphi)$

Hình chiếu: $D: \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1 \le r \le r_2 \end{cases}$

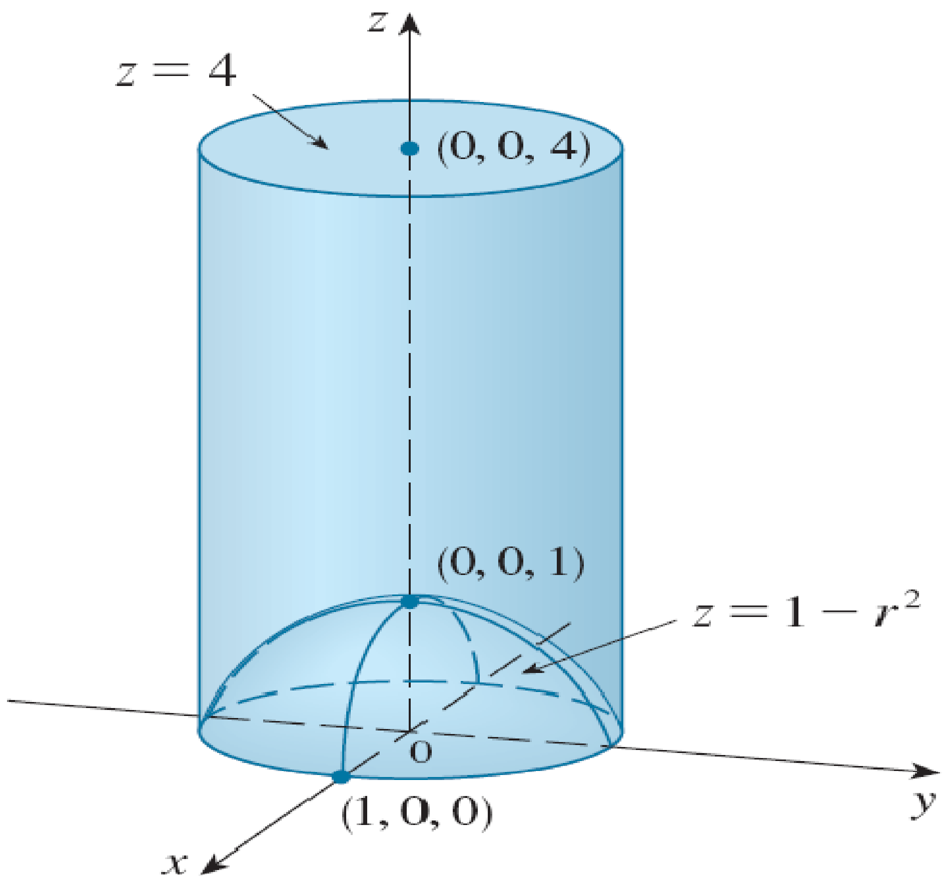
$$\Omega \leftrightarrow \Omega_1 : \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \\ z_1(r,\varphi) \le z \le z_2(r,\varphi) \end{cases}$$

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\cdot dz$$

3.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ TRỤ (tiếp theo)

Ví dụ 1: Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi:

$$z = 4,\ z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1.$$



Đặt $\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$ $J = r$

Mặt phía trên: $z = 4$

Mặt phía dưới: $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$

Hình chiếu xuống 0xy: $D: x^2 + y^2 \le 1$

$$V \leftrightarrow V_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 1 - r^2 \le z \le 4 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{1-r^2}^{4} r\cdot r\cdot dz$$

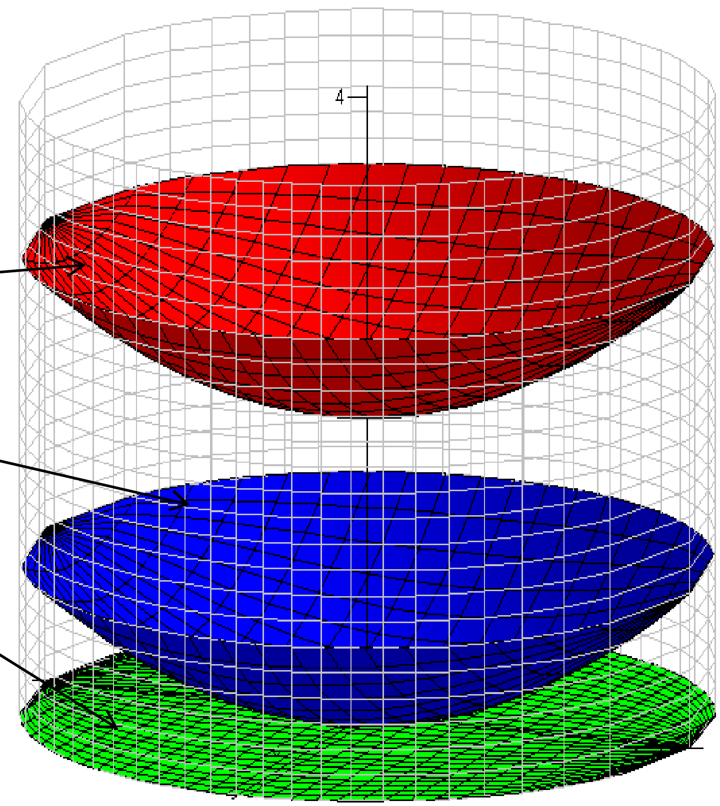
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \left[r^2 z \Big|_{1-r^2}^{4} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^2(3 + r^2) \right) dr = \frac{12\pi}{5}$$

3.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ TRỤ (tiếp theo)

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi:

$$z = x^2 + y^2, z = 2 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1.$$

Đặt $\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad J = r$



Mặt phía trên: $z = 2 + r^2$

Mặt phía dưới: $z = r^2$

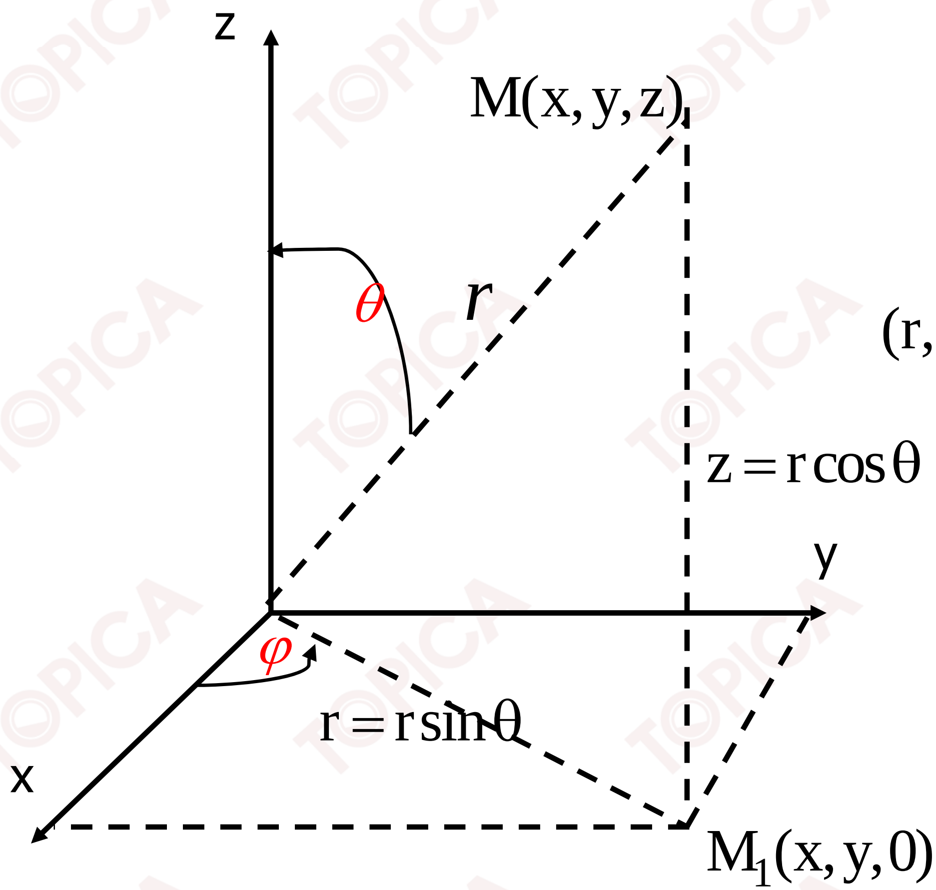
Hình chiếu xuống 0xy: $D: x^2 + y^2 \le 1$

$$V \leftrightarrow V_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le 2 + r^2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2+r^2} z \cdot r \cdot dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \left.\frac{z^2}{2}\right|_{r^2}^{2+r^2} dr = 3\pi$$

3.3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CẦU

Tọa độ cầu



Điểm M(x,y,z) trong hệ trục tọa độ 0xyz.

M được xác định duy nhất bởi bộ (r, θ, φ)

$$r = OM$$
$$\theta = (\widehat{Oz, \overline{OM}})$$
$$\varphi = (\widehat{Ox, \overline{OM_1}})$$

(r, θ, φ) được gọi là tọa độ cầu của điểm M.

Chú ý:

$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi \text{ or } -\pi \le \varphi \le \pi$$
$$0 \le r < +\infty$$

3.3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CẦU (tiếp theo)

Đổi biến số trong tọa độ cầu (khi Ω có dạng một hình cầu hay một phần hình cầu hay elipsoid)

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases}$, $\quad J = -r^2\cdot\sin\theta$

$$\Omega \leftrightarrow \Omega_1 : \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \le r \le r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$$

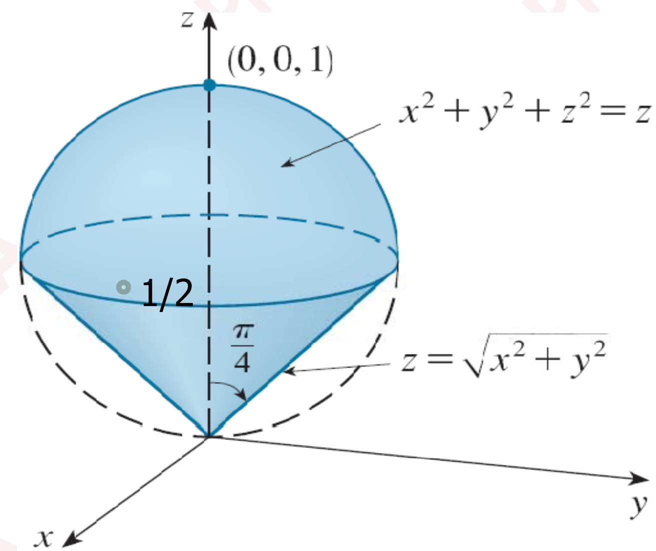
Khi đó

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1}^{r_2} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\cdot dr$$

3.3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CẦU (tiếp theo)

Ví dụ 1: Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi:

$$z \ge \sqrt{x^2+y^2},\, x^2+y^2+z^2 \le z.$$



Đặt $\begin{cases} x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, \quad J = -r^2\sin\theta \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases}$

$$V \leftrightarrow V_1 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le \cos\theta \end{cases}$$

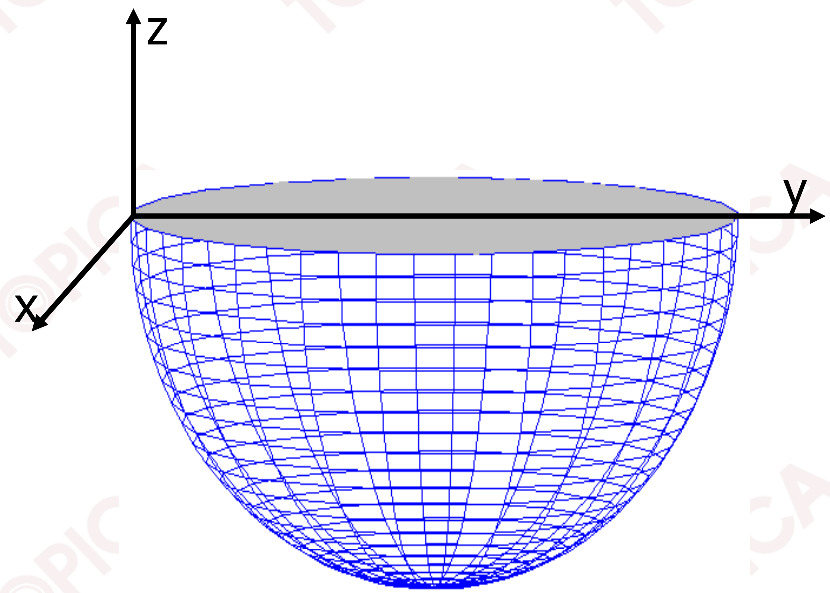
$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2 \sin\theta\cdot dr \quad = \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{2}}{80}\right)\pi$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (y+z)dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi:

$$z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2y \quad (z \le 0)$$

Cách 1

Đặt: $\begin{cases} x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi & J = -r^2\sin\theta \\ y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, & J = -r^2\sin\theta \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases}$



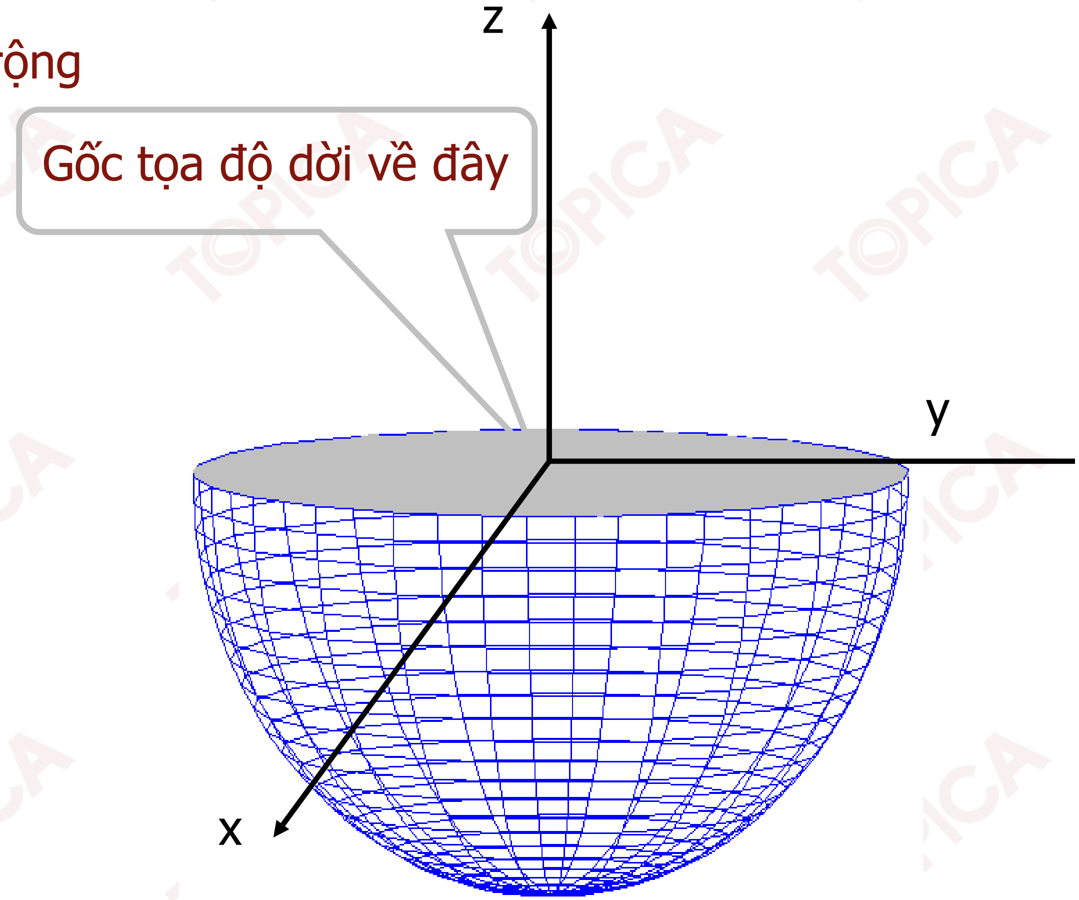
$$V \leftrightarrow V_1 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 2\sin\theta\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta\cdot\sin\varphi} (r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\cdot dr$$

3.3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CẦU (tiếp theo)

Cách 2: Đổi sang tọa độ cầu suy rộng

$$\begin{cases} x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y-1 = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases}$$



Xác định cận:

$$V \leftrightarrow V_1 : \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 1 \end{cases}$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\cdot d\rho$$

4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA

- Từ định nghĩa tích phân bội ba ta có công thức tính thể tích vật thể Ω:

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz$$

- Có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích vật thể.
- Tuy nhiên trong một số trường hợp sử dụng tích phân bội ba tính nhanh hơn.
- vì tích phân bội ba có cách đổi sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA

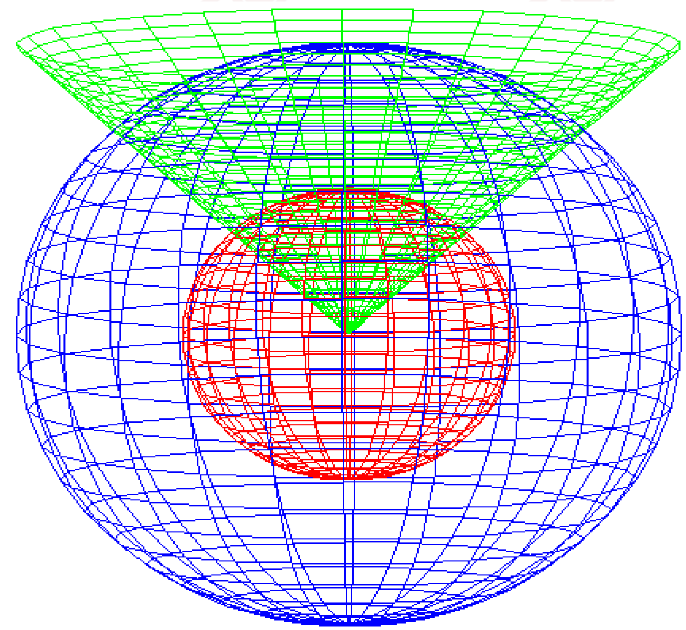
Ví dụ 1: Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi

$$x^2+y^2+z^2=1; x^2+y^2+z^2=4, z\ge\sqrt{x^2+y^2}$$

Thể tích $V=\iiint\limits_E dxdydz$

Đặt: $\begin{cases} x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, \ J=-r^2\sin\theta \\ z=r\cdot\cos\theta \end{cases}$

$$E \leftrightarrow E_1 : \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \\ 1\le r\le 2 \end{cases}$$



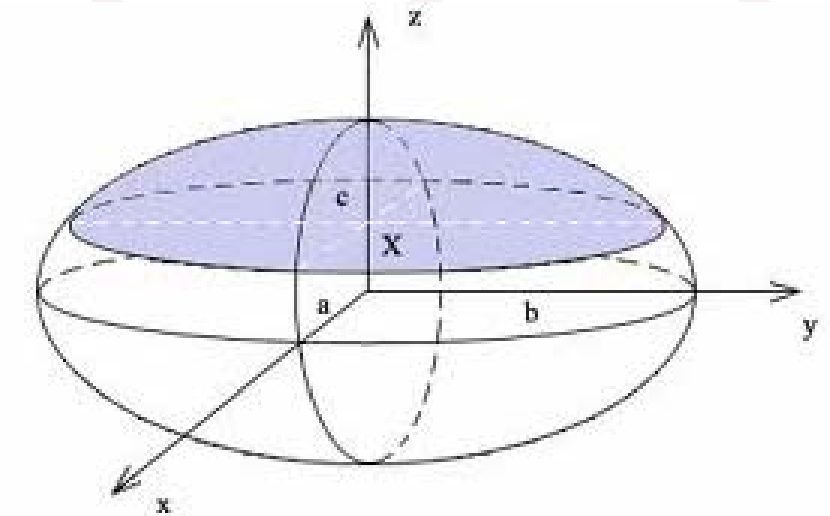
$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r^2\sin\theta\cdot dr \quad =\frac{14}{3}\pi-\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi$$

4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA

Ví dụ 2: Tính thể tích của hình elipsoid (E) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

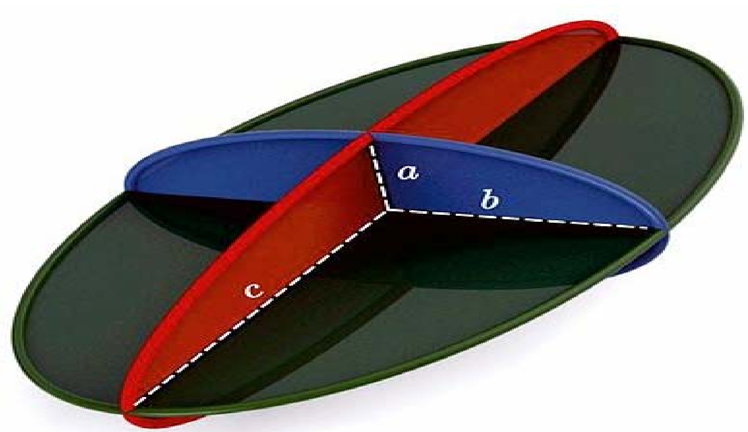
$$V=\iiint\limits_{E} dxdydz$$

Sử dụng tọa độ cầu suy rộng



Đặt: $\begin{cases} x = ar\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = br\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ J=-abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cdot\cos\theta \end{cases}$

$$E \leftrightarrow E_1 : \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 1 \end{cases}$$



$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{1} abcr^2\sin\theta\cdot dr \quad =\frac{4\pi abc}{3}$$

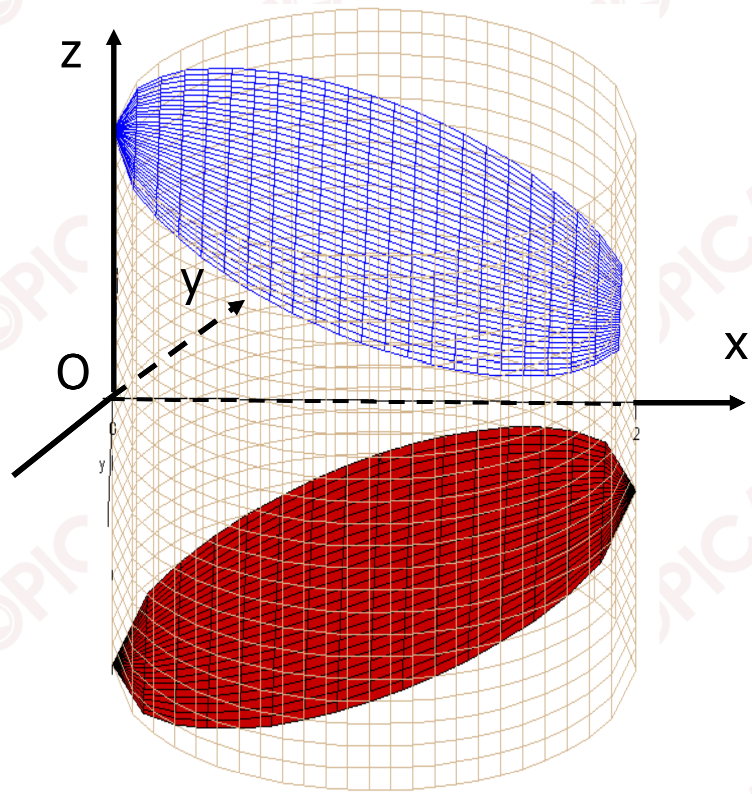
4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA

Ví dụ 3: Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi $x^2+y^2=2x; x+z=3, x-z=3$

$$V=\iiint\limits_E dxdydz$$

Sử dụng tọa độ trụ $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi, J=r \\ z=z \end{cases}$

$$E \leftrightarrow E_1 : \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 2\cos\varphi \\ r\cos\varphi-3\le z\le 3-r\cos\varphi \end{cases}$$



$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}dr\int_{r\cos\varphi-3}^{3-r\cos\varphi}r\cdot dz=4\pi$$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài này chúng ta đã xem xét các nội dung chính sau:

- Khái niệm tích phân bội ba;
- Cách tính tích phân bội ba;
- Ứng dụng tích phân bội ba để tính thể tích vật thể.