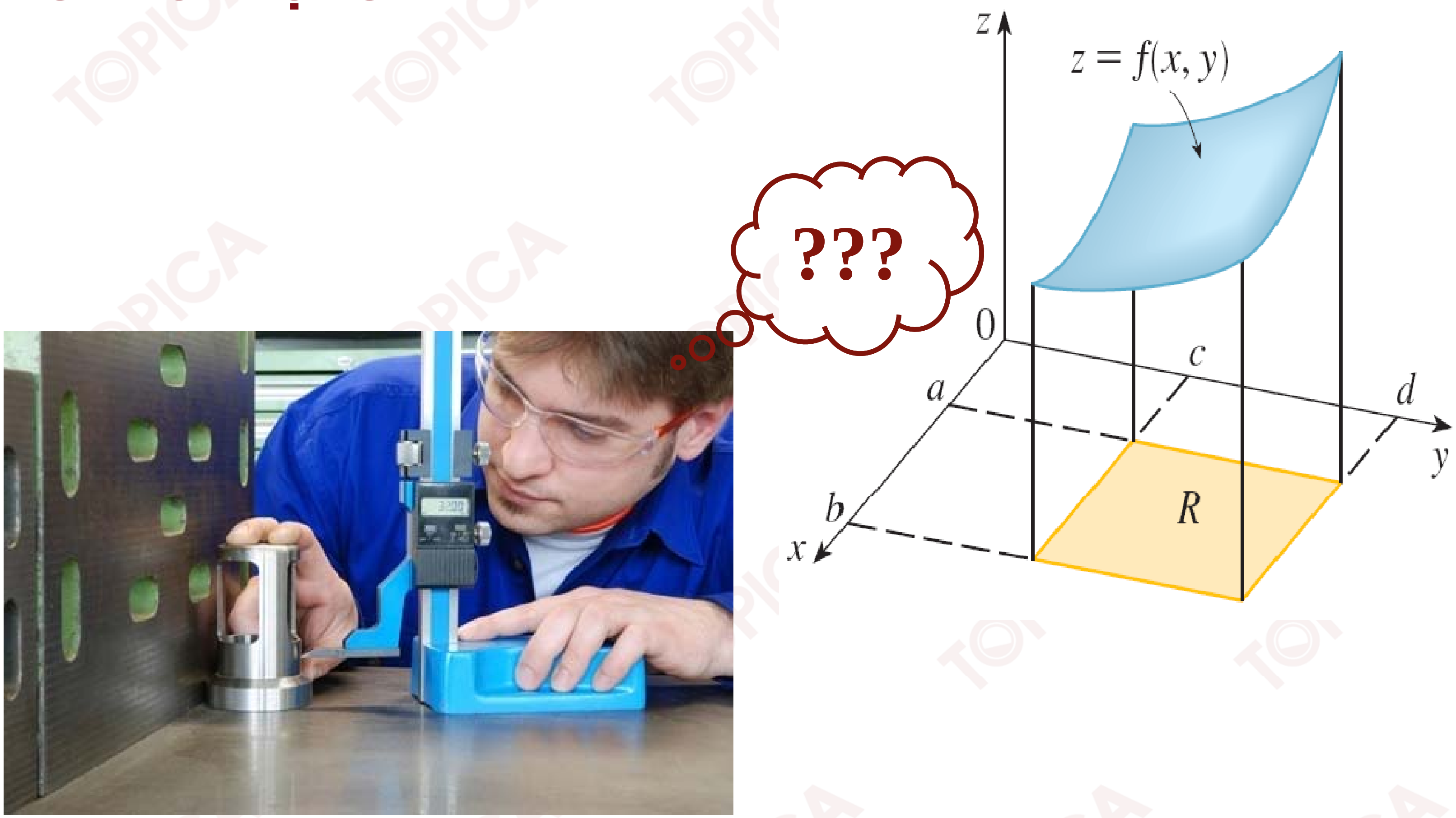
BÀI 1
TÍCH PHÂN KÉP

Giảng viên: ThS. Nguyễn Hải Sơn

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI



Người ta thiết kế một vật thể hình trụ cong có đáy dưới là một hình vuông và đáy trên là một phần mặt cầu có bán kính 20cm, các cạnh bên của hình trụ có chiều dài cạnh nhỏ nhất là 20cm và cạnh lớn nhất có chiều dài 40cm, hai cạnh còn lại bằng nhau. Người ta dự định sẽ mạ vàng mặt trên của vật đó. Một vấn đề đặt ra là cần tính toán diện tích mặt trên đó.

MỤC TIÊU BÀI HỌC

Sau khi học xong bài này, sinh viên có thể:

- Trình bày được khái niệm tích phân kép và các ứng dụng của nó.
- Làm được các bài tập liên quan đến tích phân kép.
- Ứng dụng tích phân kép vào tính toán diện tích hình phẳng và mặt cong, cũng như thể tích vật thể.

CÁC KIẾN THỨC CẦN CÓ

- Sinh viên cần có các kiến thức cơ bản về giải tích, đặc biệt là phép tính tích phân hàm một biến số.
- Bên cạnh đó, sinh viên cũng cần có các kiến thức về hình học phẳng, hình học không gian và cơ học.

HƯỚNG DẪN HỌC

- Xem bài giảng đầy đủ và tóm tắt những nội dung chính của từng bài.
- Tích cực thảo luận trên diễn đàn và đặt câu hỏi ngay nếu có thắc mắc.
- Làm các bài tập và luyện thi trắc nghiệm theo yêu cầu từng bài.

CẤU TRÚC NỘI DUNG

1. Định nghĩa – Tính chất
2. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Đề các
3. Phép đổi biến số trong tích phân kép
4. Ứng dụng trong hình học

1. ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT

1.1. Bài toán tính thể tích hình trụ cong

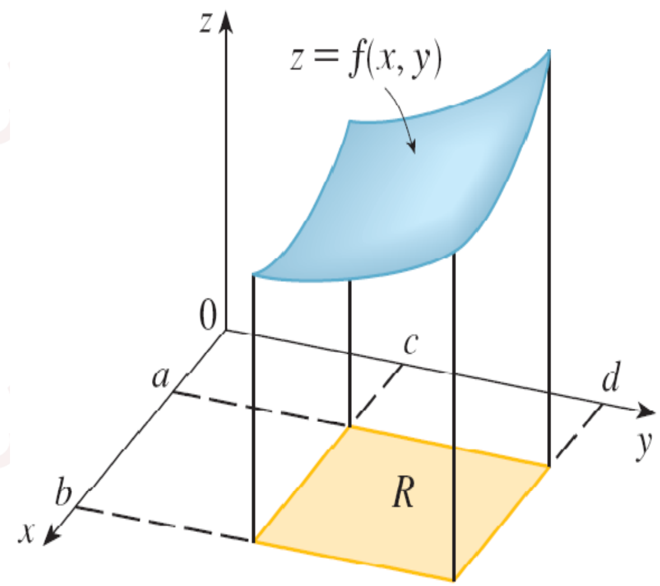
1.2. Định nghĩa tích phân kép

1.3. Tính chất

1.1. BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH HÌNH TRỤ CONG

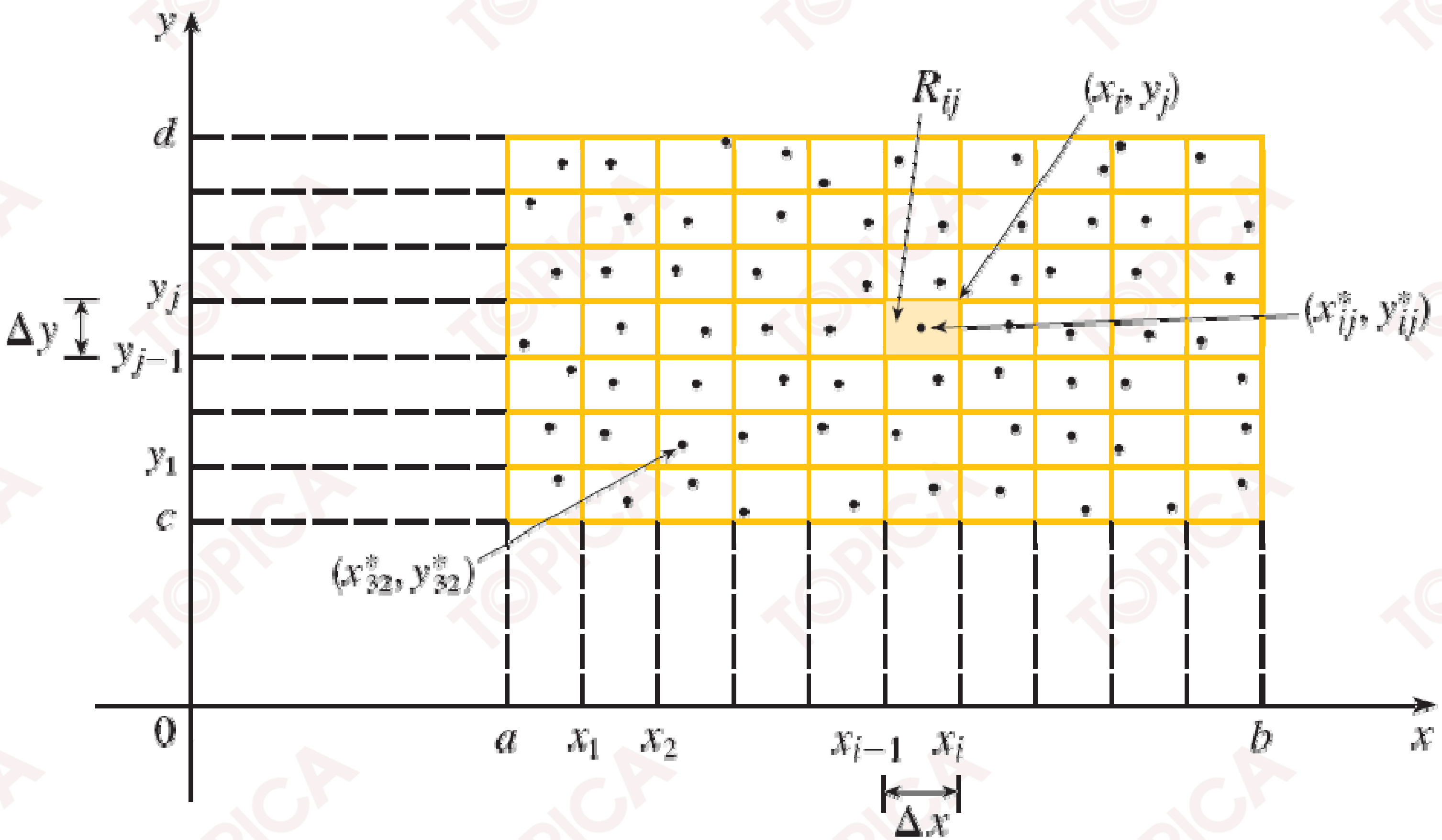
Bài toán: $S_{D_1}, S_{D_2}, \ldots, S_{D_n}$.

Cho vật thể (H) được giới hạn trên bởi mặt cong z=f(x,y), (với f(x,y) là hàm liên tục, không âm), giới hạn dưới bởi miền D (đóng, bị chặn), giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song oz, tựa trên biên D. Tìm thể tích vật thể (H)?

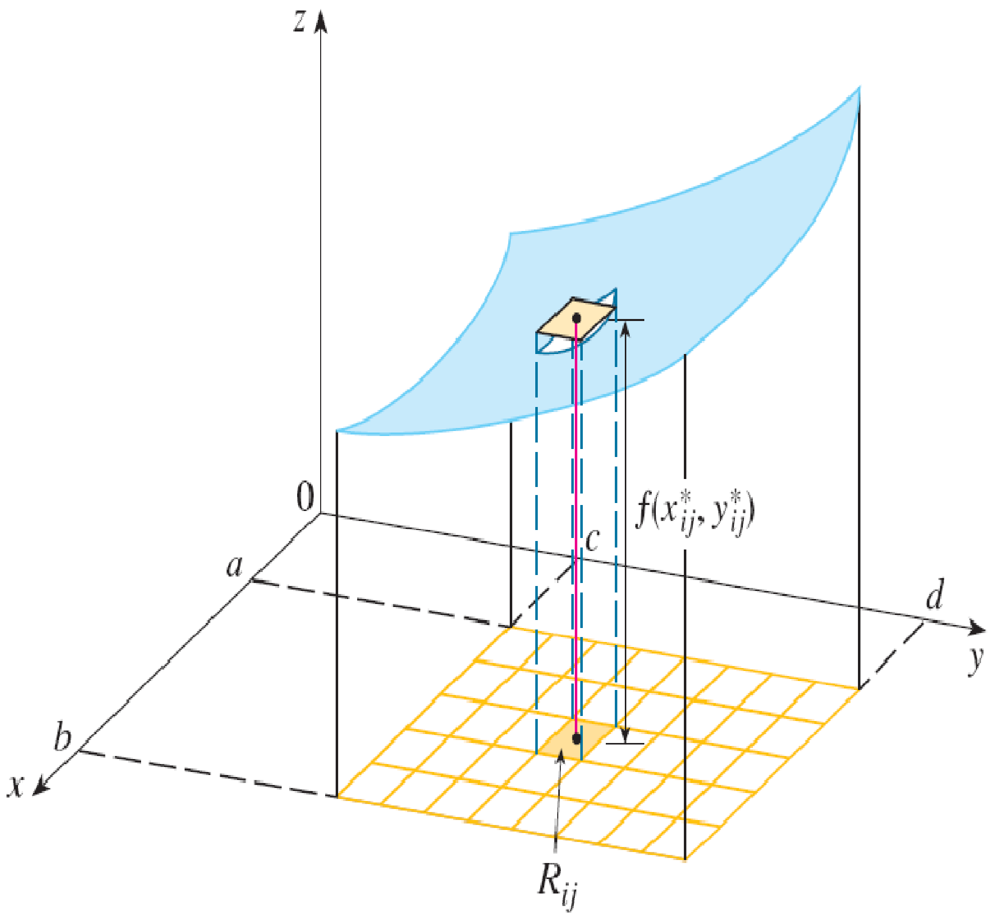


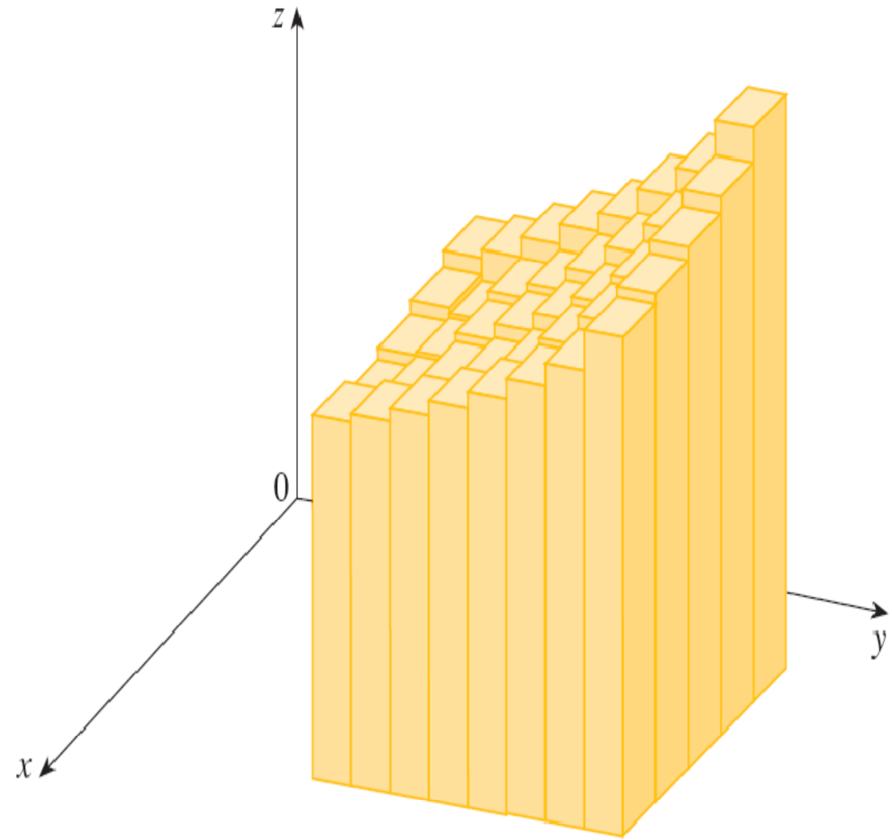
1.1. BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH HÌNH TRỤ CONG (tiếp theo)

- Chia D một cách tùy ý ra thành n miền không dẫm nhau: $D_1, D_2, ..., D_n$ có diện tích tương ứng là:
- Trên mỗi miền lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i) \in D_i$



1.1. BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH HÌNH TRỤ CONG (tiếp theo)





Thể tích của vật thể

$$\boxed{V \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot S_{D_i} = V_n}$$

1.2. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP

- Cho f = f(x,y) xác định trên miền đóng và bị chặn D.
- Chia D một cách tùy ý ra thành n miền không dẫm nhau: D_1, D_2, ..., D_n có diện tích tương ứng là: $S_{D_1}, S_{D_2}, \dots, S_{D_n}$.

  Trên mỗi miền lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i) \in D_i$

  Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot S_{D_i}$

  Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max(d_{D_i}) \to 0$, với d_i là đường kính của miền D_i, nếu $I_n \to I$ không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn các điểm M_i thì I gọi là tích phân kép của f trên D, kí hiệu là:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

  Khi đó, ta nói f khả tích trên D.
- Nhận xét: Thể tích hình trụ cong trong mục 1.1 là:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

- Định lý: Nếu f(x,y) liên tục trên D thì f(x,y) khả tích trên D.

1.3. TÍNH CHẤT

1. $$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy$$

2. $$\iint_D \left[f(x,y) + g(x,y)\right]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

3. Nếu D được chia làm hai miền D_1 và D_2 rời nhau thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4. $$S_D = \iint_D 1dxdy = \iint_D dxdy$$

5. $$\forall (x,y) \in D, f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint_D fdxdy \le \iint_D gdxdy$$

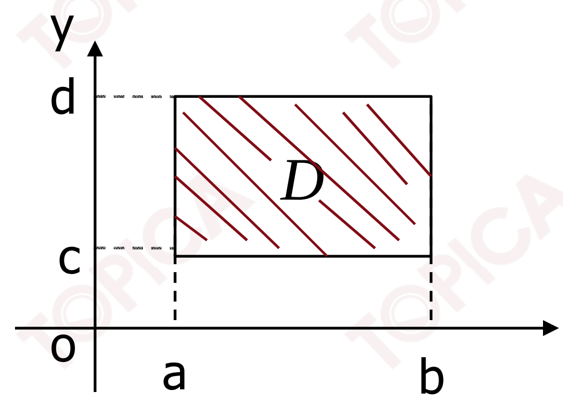
2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

Định lý Fubini

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy$$

- **Trường hợp 1:** D là hình chữ nhật D = [a;b]x[c,d]

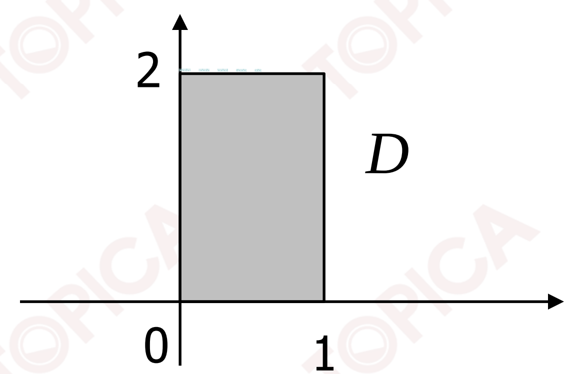
$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$



Ví dụ 1: Tính $I = \iint_D (xy^2 + y)dxdy$ với D=[0;1]x[0;2]

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 (xy^2 + y)dy = \int_0^1 \left[\left(x\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3}x + 2 \right) dx = \left(\frac{4}{3}x^2 + 2x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{10}{3}$$



2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

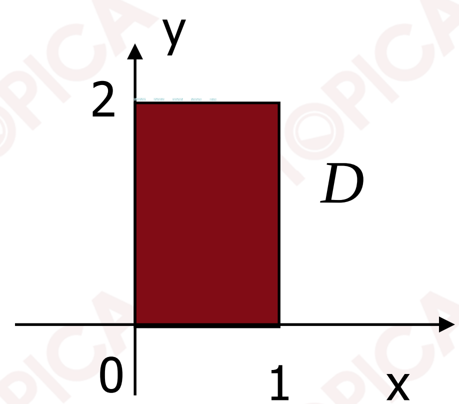
Chú ý: Khi D=[a;b]x[c;d] và f(x,y)=g(x)h(y), ta có:

$$I=\iint_D g(x)h(y)dxdy=\left(\int_a^b g(x)dx\right).\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Ví dụ 2: Tính $I=\iint_D (xy+y)dxdy$, với D = [0;1]x[0;2]

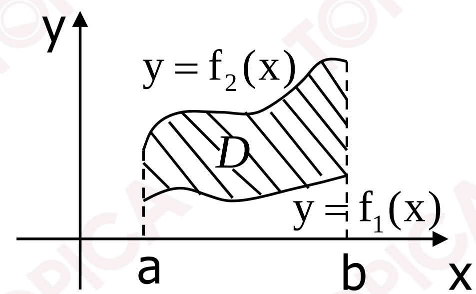
$$I=\iint_D (x+1)ydxdy=\left(\int_0^1 (x+1)dx\right)\left(\int_0^2 ydy\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1.\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2\right)=\frac{3}{2}\times 2=3$$



2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

- **Trường hợp 2:** $D:\begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases}$

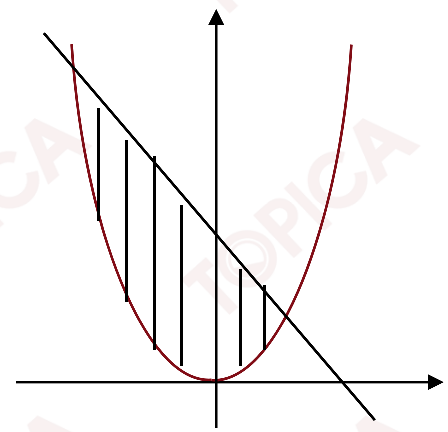


$$\boxed{I = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \iint_D (xy^2 + y)dxdy$

với D là miền phẳng được giới hạn bởi $y = x^2, y = 2 - x$

Ta có $x^2 = 2 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow D: \begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2 - x \end{cases}$

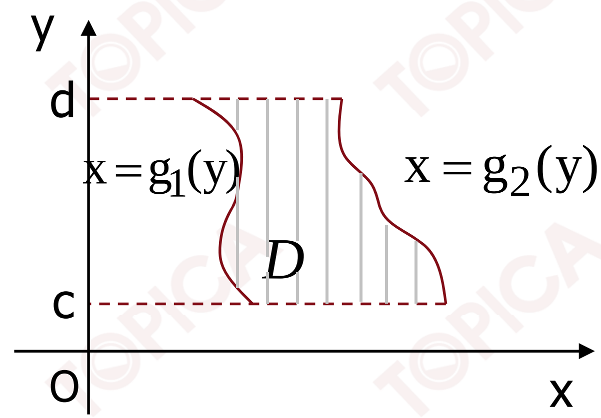


$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (xy^2 + y)dy$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[x\frac{(2-x)^3}{3} + \frac{(2-x)^2}{2} - x\frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^2}{2} \right] dx = \ldots = \frac{713}{40}$$

2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

- **Trường hợp 3:** $D: \begin{cases} c \le y \le d \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{cases}$



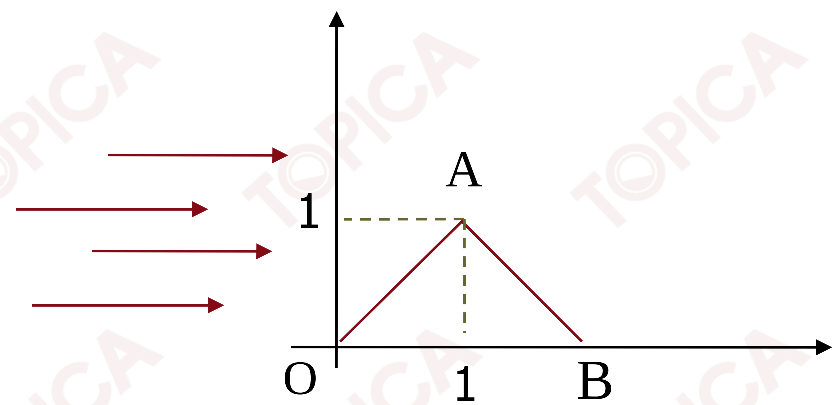
$$\boxed{I = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \iint_D (xy + y)dxdy$ với D là tam giác OAB với tọa độ O(0;0), A(1;1) và B(2;0).

Từ hình vẽ ta có: $D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 2 - y \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (xy + y)dx$$

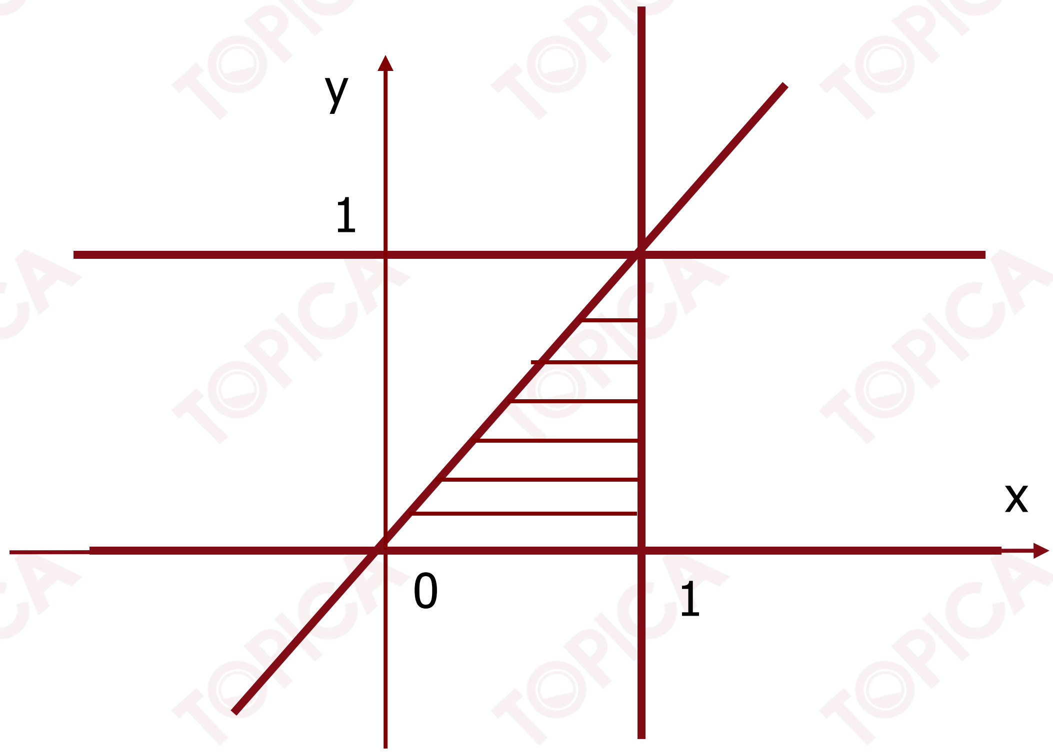
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} + xy \right)\Bigg|_y^{2-y} dy = \dots$$



2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC (tiếp theo)

Ví dụ 5: Tính tích phân kép $I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$

- Tích phân $\int_y^1 e^{x^2} dx$ không tính được (qua các hàm sơ cấp)
- Thay đổi thứ tự lấy tích phân:
  - Xác định miền D;
  - Vẽ miền D;
  - Thay đổi thứ tự.



Ta có $D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$

Thay đổi cận $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 e^{x^2} \left. y \right|_0^x dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left. \frac{1}{2} e^{x^2} \right|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TÍCH PHÂN KÉP

3.1. Phép đổi biến số tổng quát

3.2. Phép đổi biến số trong tọa độ cực

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy$$

- Đổi biến $\begin{cases} x = x(u, v) \ (*) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

  Giả sử rằng:

  - x=x(u,v), y=y(u,v) là các hàm số liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp 1 trên miền D′ của mặt phẳng Ouv.
  - Công thức (*) xác định một song ánh từ D′ lên D.
  - Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D'$$

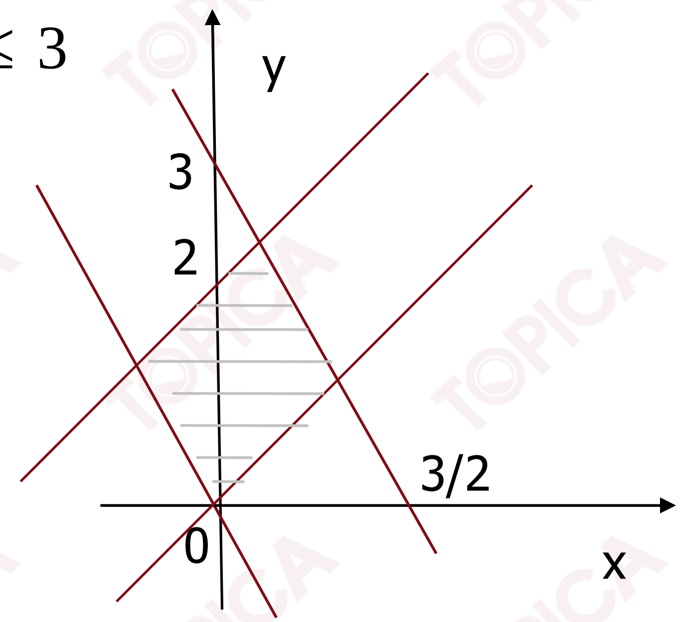
Khi đó:

$$\boxed{I = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \, | J | \, dudv}$$

Ví dụ 1: Tính $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$, với D $\begin{cases} x \le y \le x+2 \\ -y \le 2x \le 3-y \end{cases}$

$$D: \begin{cases} x \le y \le x+2 \\ -y \le 2x \le 3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y-x \le 2 \\ 0 \le 2x+y \le 3 \end{cases}$$

Đổi biến $\begin{cases} u = y-x \\ v = 2x+y \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x = (v-u)/3 \\ y = (v+2u)/3 \end{cases}$



Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}$$

$$D \leftrightarrow D': \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow I = \iint\limits_{D'} \frac{(v-u+2u+v)}{3} \cdot \frac{1}{3} dudv$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 du \int_0^3 (u+2v)dv = \ldots = \frac{8}{3}$$

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT (tiếp theo)

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

- Khi D là một miền đối xứng qua Ox hoặc Oy hoặc gốc O, ta có kết quả sau:

  $D = D_1 \cup D_2$ với D_1 và D_2 rời nhau.

  - Nếu D_1 đối xứng D_2 qua Ox thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & \text{khi } f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

  - Nếu D_1 đối xứng D_2 qua Oy thì

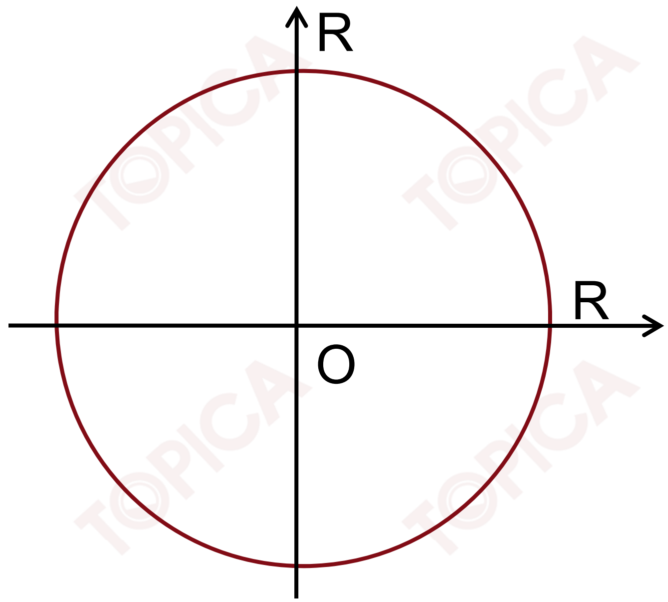
$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & \text{khi } f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

  - Nếu D_1 đối xứng D_2 qua O thì

$$I = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(-x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & \text{khi } f(-x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

3.1. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TỔNG QUÁT (tiếp theo)

Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D (xy^2 + y^3)dxdy$, với $D: x^2 + y^2 \le R^2$



Ta có:

D là hình tròn tâm O bán kính R nên D đối xứng qua gốc tọa độ O.

Hàm số $f(x,y)=xy^2+y^3$ có tính chất

$f(-x;-y)=-f(x,y)$,

Do đó

$$I = \iint\limits_D (xy^2 + y^3)dxdy = 0$$

3.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC

3.2.1. Tọa độ cực

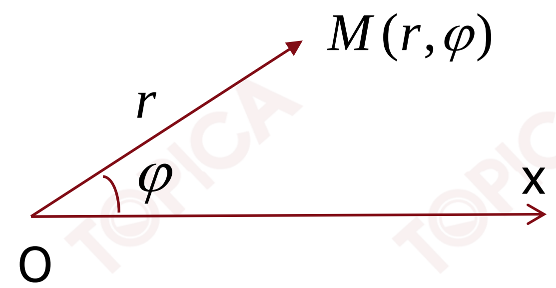
3.2.2. Phép đổi biến số trong tọa độ cực

3.2.3. Phép đổi biến số trong tọa độ cực mở rộng

3.2.1. TỌA ĐỘ CỰC

- Tọa độ cực của điểm M là bộ số (r, φ)

$$\begin{cases} r = OM \\ \varphi = (\overrightarrow{OM}, Ox) \end{cases}$$



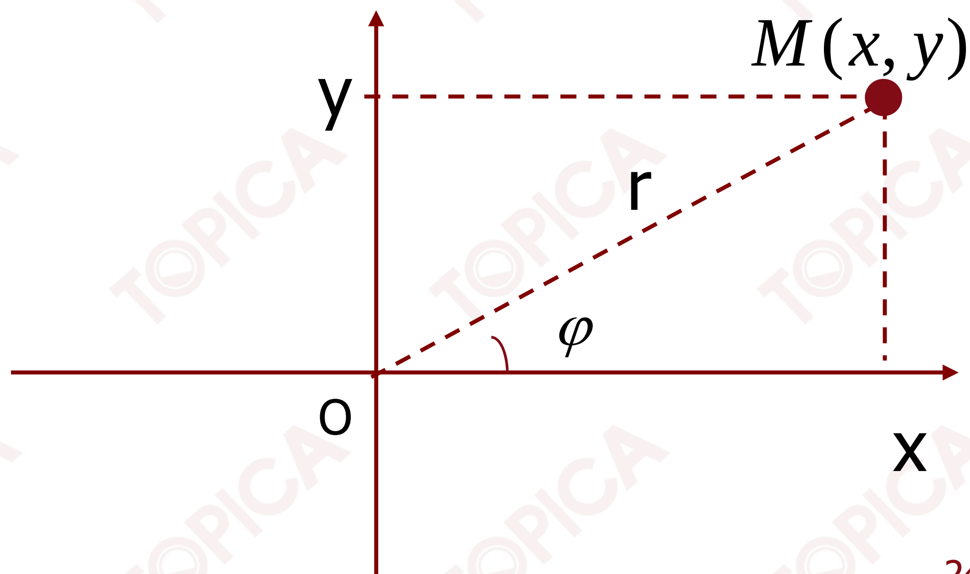
- Mối liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Đề các

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

<u>Chú ý:</u>

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$



3.2.1. TỌA ĐỘ CỰC (tiếp theo)

Ví dụ

- Phương trình đường tròn tâm O, bán kính bằng 2: $x^2 + y^2 = 4$

  Phương trình đường tròn này trong tọa độ cực là: $r = 2.$

- Phương trình đường tròn tâm (1,0), bán kính bằng 1: $x^2 + y^2 = 2x$

  Phương trình đường tròn này trong tọa độ cực là: $r^2 = 2r\cos\varphi \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$

- Phương trình đường tròn tâm (0,1), bán kính bằng 1: $x^2 + y^2 = 2y$

  Phương trình đường tròn này trong tọa độ cực là: $r^2 = 2r\sin\varphi \Leftrightarrow r = 2\sin\varphi$

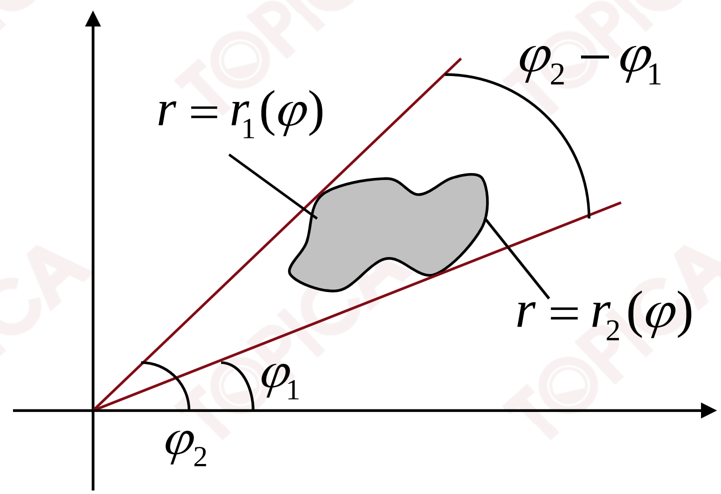
- Phương trình đường thẳng x = 2 (trong tọa độ Descartes)

  Phương trình đường thẳng này trong tọa độ cực là: $r\cos\varphi = 2 \Leftrightarrow r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$

3.2.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



Ta có: $J = \dfrac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$

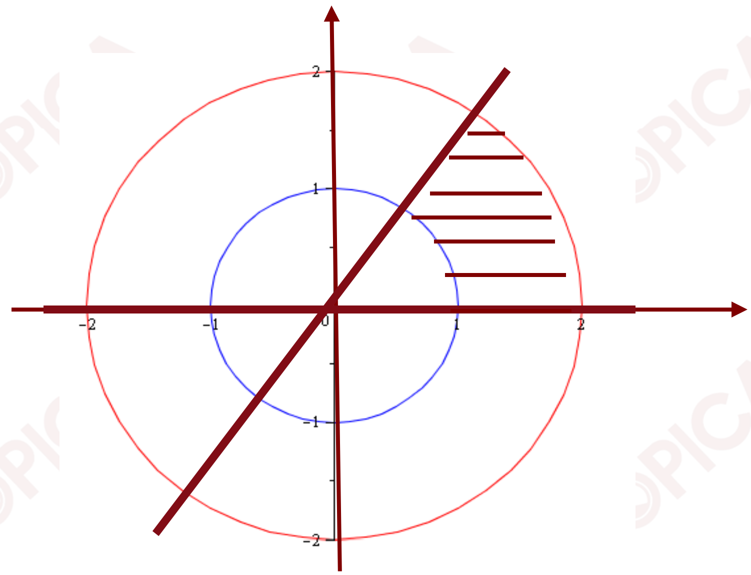
$$D \leftrightarrow D_{r,\varphi} \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$$

$$\boxed{I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi).rdr}$$

3.2.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC (tiếp theo)

Ví dụ 1: Tính tích phân kép $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$ trong đó D là miền phẳng xác định bởi

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x$$



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad J = r$

$$D \leftrightarrow D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\cdot r \cdot dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot r^2 \cdot dr$$

$$I = \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\varphi$$

$$I = \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) d\varphi = \frac{7}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/4} = \ldots = \frac{7}{3}$$

3.2.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC (tiếp theo)

Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$ trong đó D là miền phẳng xác định bởi

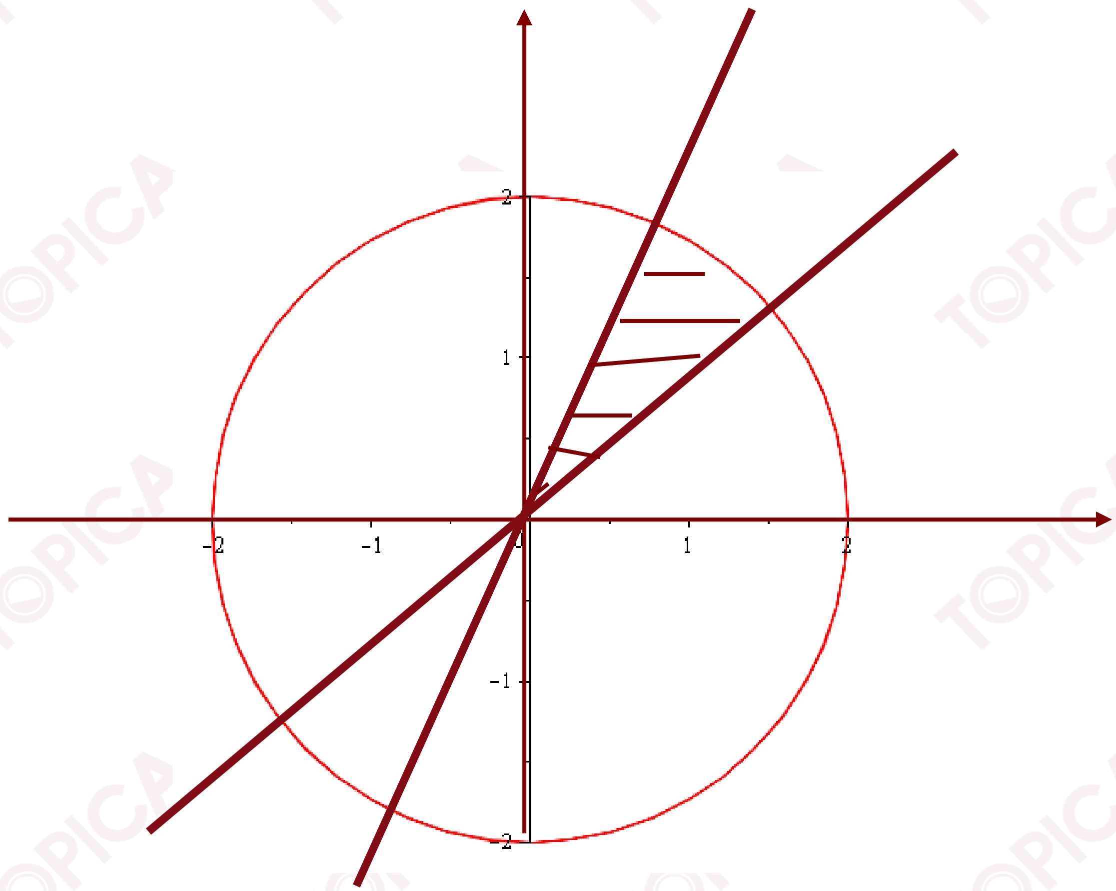
$$x^2 + y^2 \le 4,\ x \le y \le x\sqrt{3}$$

Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad J = r$

$$D \leftrightarrow D' \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4 - r^2}.rdr$$

$$I = \frac{2\pi}{9}$$



3.2.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC (tiếp theo)

Ví dụ 3: Tính $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ trong đó $D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 2x \\ y \le -x \end{cases}$

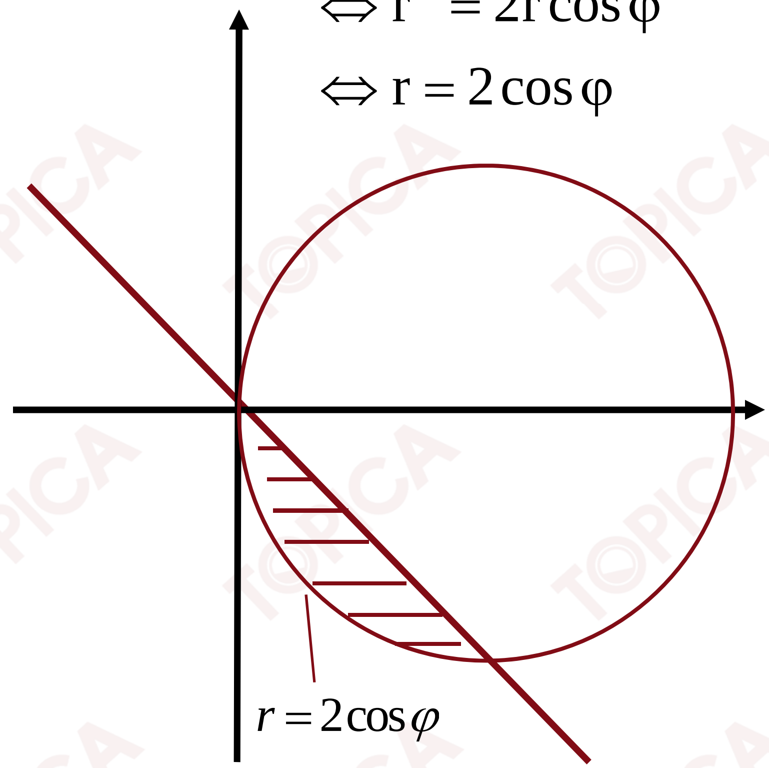
Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad J = r$

$$x^2+y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\varphi \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$$

$$D \leftrightarrow D' \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{-\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r \cdot r \cdot dr$$

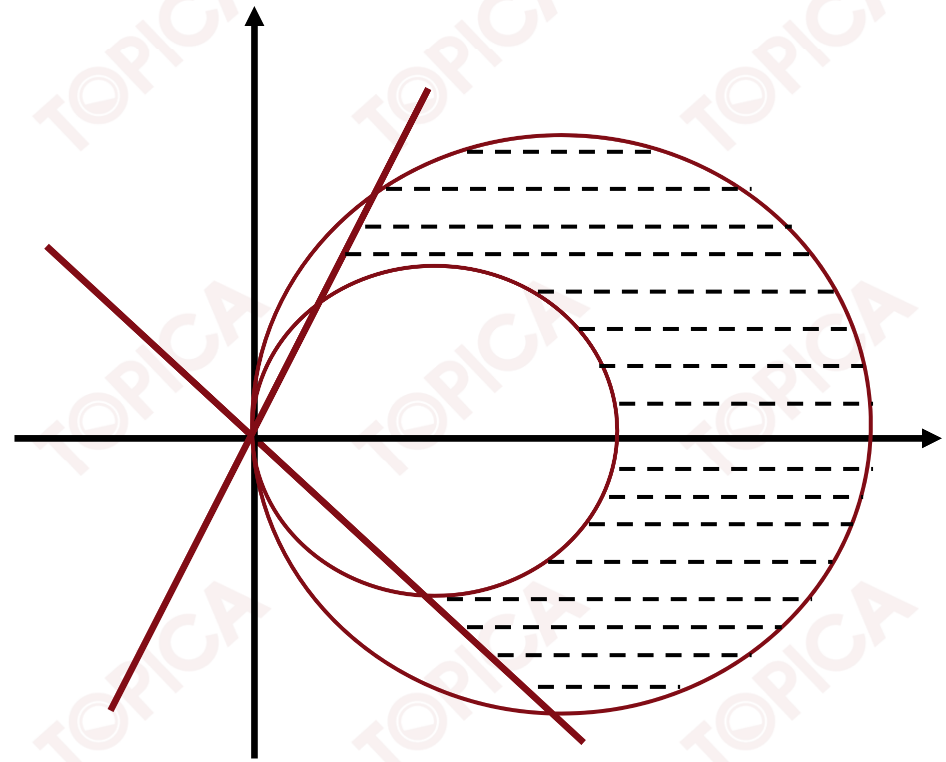
$$I = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{8}{3}\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{16-10\sqrt{2}}{9}$$



3.2.2. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC (tiếp theo)

Ví dụ 4: Tính $I = \iint\limits_D (x+1)dxdy$ trong đó D là miền phẳng xác định bởi

$$2x \le x^2 + y^2 \le 4x; -x \le y \le x\sqrt{3}$$



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $\quad J = r$

$$D: \begin{cases} \dfrac{-\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (r\cos\varphi + 1) \cdot r \cdot dr$$

3.2.3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC MỞ RỘNG

- **Trường hợp 1:** Miền phẳng D là hình tròn $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2$

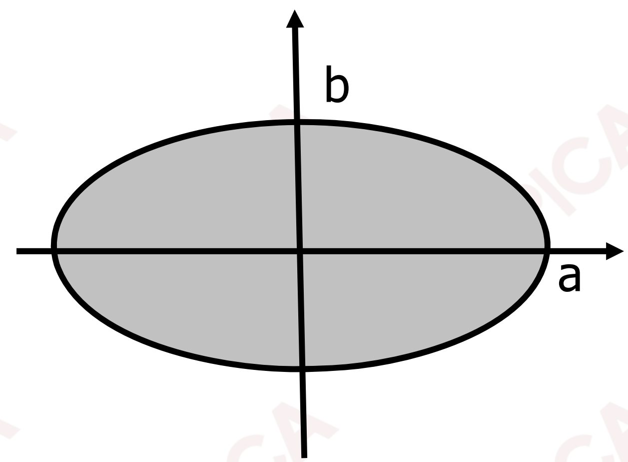
  Dùng phép đổi biến: $\begin{cases} x-x_0 = r\cos\varphi \\ y-y_0 = r\sin\varphi \end{cases}$

  Khi đó định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r.\sin\varphi \\ \sin\varphi & r.\cos\varphi \end{vmatrix}$

  Khi lấy cận của r,φ ta coi như gốc tọa độ dời về tâm hình tròn

- **Trường hợp 2:** Miền phẳng D là Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1, a>0, b>0$

  Dùng phép đổi biến: $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$



  Khi đó định thức Jacobi:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a.\cos\varphi & -ar.\sin\varphi \\ b.\sin\varphi & br.\cos\varphi \end{vmatrix} = a.b.r$$

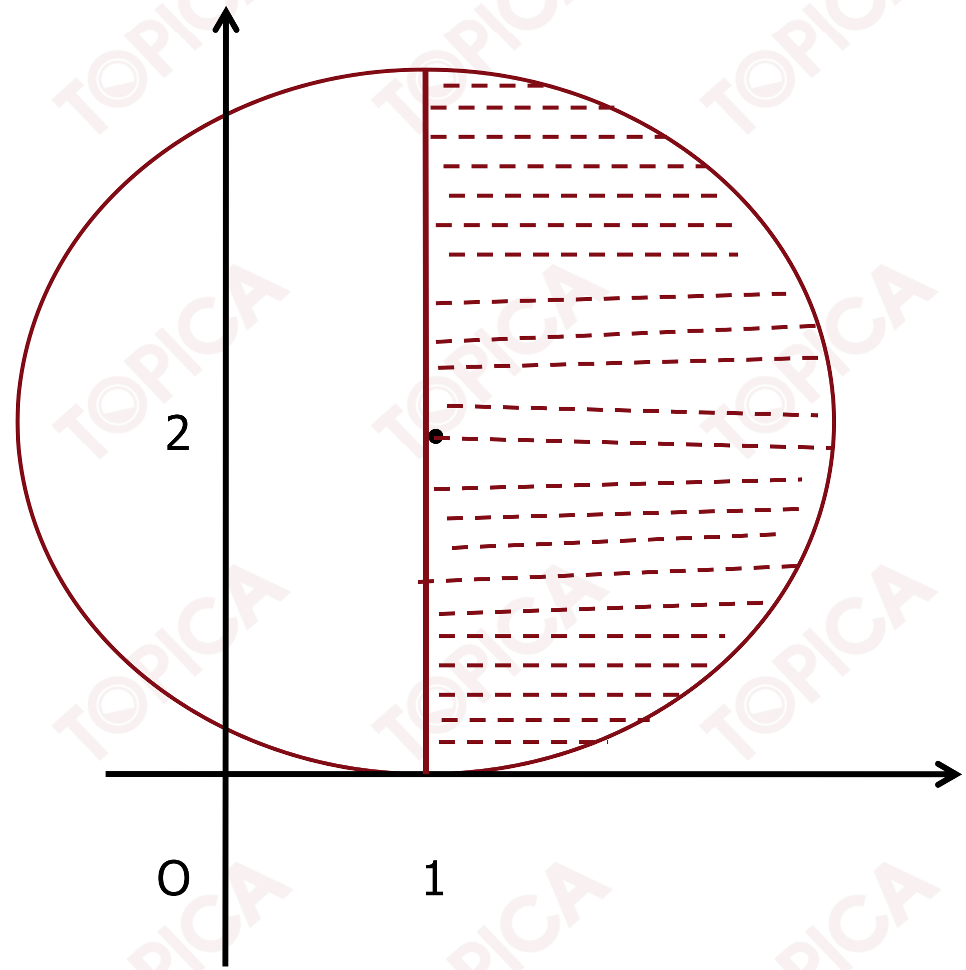
  Khi đó cận của r,φ: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

Ví dụ 1: Tính $I = \iint_D 2x\,dx\,dy$ trong đó D là miền phẳng xác định bởi $(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 4; x \ge 1.$

Đổi biến $\begin{cases} x - 1 = r\cos\varphi \\ y - 2 = r\sin\varphi \end{cases}$, $J = r$

$$D \leftrightarrow D' \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 2(1 + r\cos\varphi)\cdot r \cdot dr$$



3.2.3. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TỌA ĐỘ CỰC MỞ RỘNG (tiếp theo)

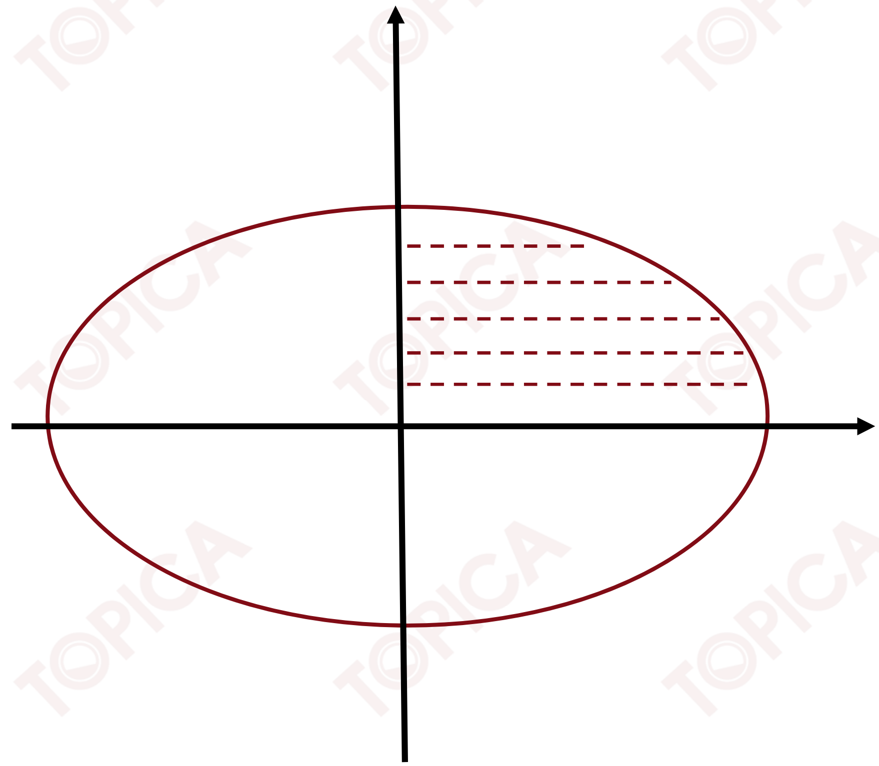
Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D (x+1)dxdy$ trong đó D là miền phẳng xác định bởi

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1; y \ge 0; x \ge 0$$

Đổi biến $\begin{cases} x = 3r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases}, \ J = 3.2.r$

$$D \leftrightarrow D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \left(3.r\cos\varphi + 1\right) \cdot 3 \cdot 2 \cdot r \cdot dr$$



4. ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC

4.1. Tính diện tích miền phẳng

4.2. Tính thể tích vật thể

4.3. Tính diện tích mặt cong

4.1. TÍNH DIỆN TÍCH MIỀN PHẲNG

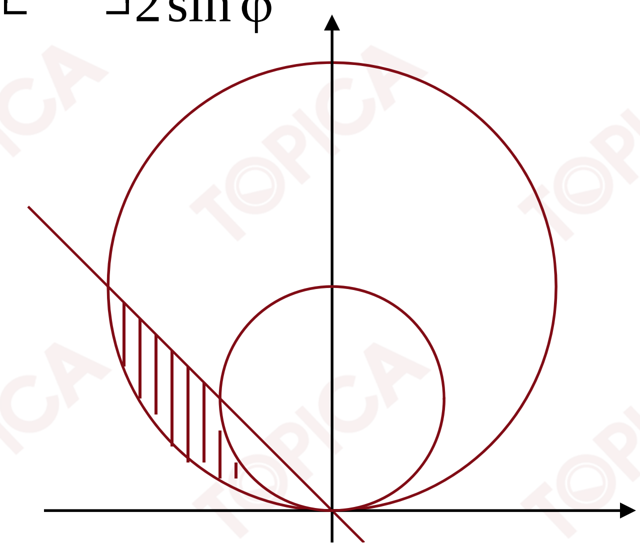
$$\boxed{S_D = \iint\limits_D dxdy}$$

Ví dụ: Tính diện tích miền phẳng $D: \begin{cases} 2y \le x^2 + y^2 \le 4y \\ y \le -x \end{cases}$

Dùng phương pháp tọa độ cực ta có: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $J = r$, $D \leftrightarrow D' \begin{cases} \dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi \\ 2\sin\varphi \le r \le 4\sin\varphi \end{cases}$

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} rdr = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi$$

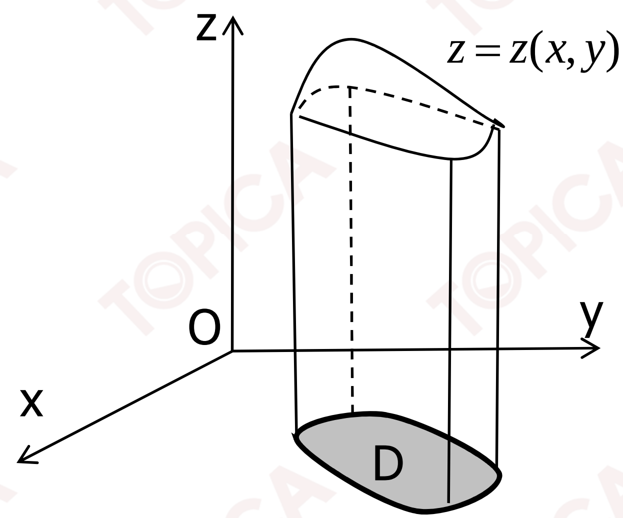
$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} 6\sin^2\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}$$



4.2. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

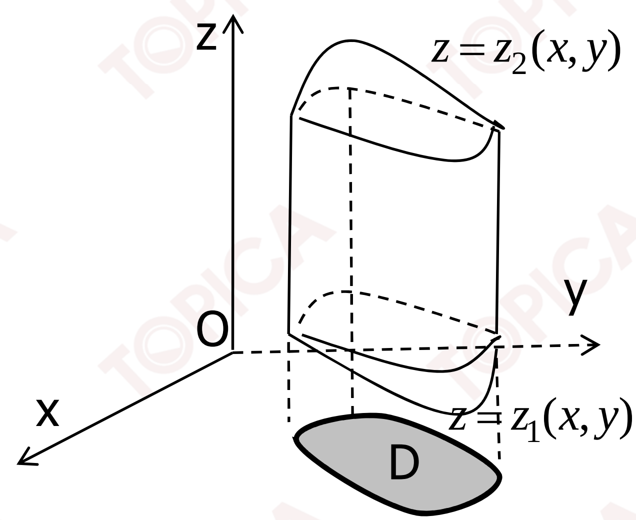
- **Thể tích hình trụ cong** có đáy trên là mặt z=z(x,y), đáy dưới là miền D trên Oxy, các cạnh bên song song 0z:

$$V = \iint\limits_{D} z(x, y)dxdy$$



- **Thể tích hình trụ cong** có đáy trên là $z=z_2(x,y)$, đáy dưới là $z=z_1(x,y)$, các cạnh bên song song với 0z, hình chiếu lên Oxy là miền D:

$$V = \iint\limits_{D} \left(z_2(x, y) - z_1(x, y)\right)dxdy$$



4.2. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ (tiếp theo)

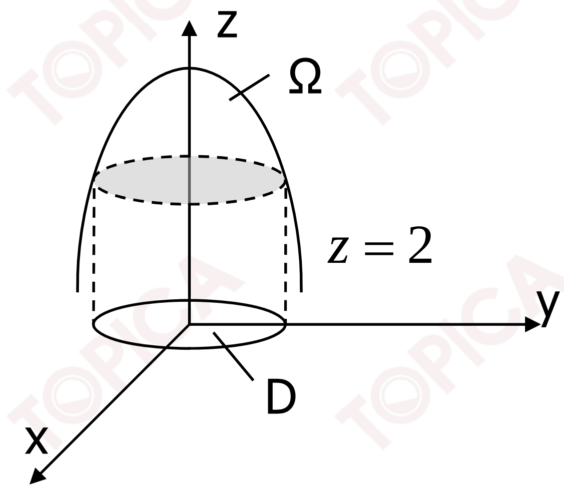
Ví dụ 1: Tính thể tích vật thể Ω bị giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

Mặt trên là mặt paraboloid: $z = 4 - x^2 - y^2$

Mặt dưới là mặt phẳng: $z = 2$

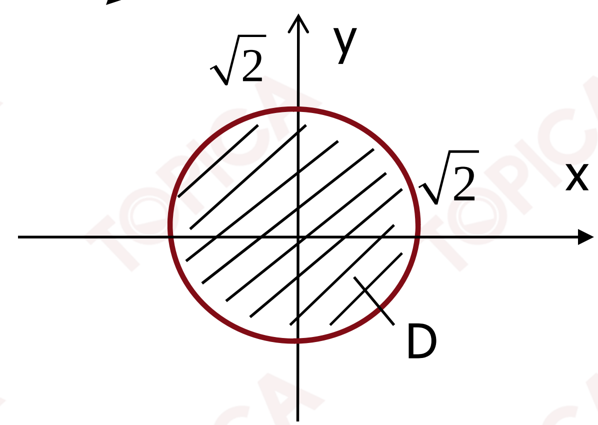
Hình chiếu của Ω lên Oxy là miền D $x^2 + y^2 \le 2$

$$\Rightarrow V_\Omega = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} (4 - x^2 - y^2 - 2)\,dxdy$$



Đổi biến trong tọa độ cực ta có:

$$V_\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr = \ldots = 2\pi$$



4.2. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ (tiếp theo)

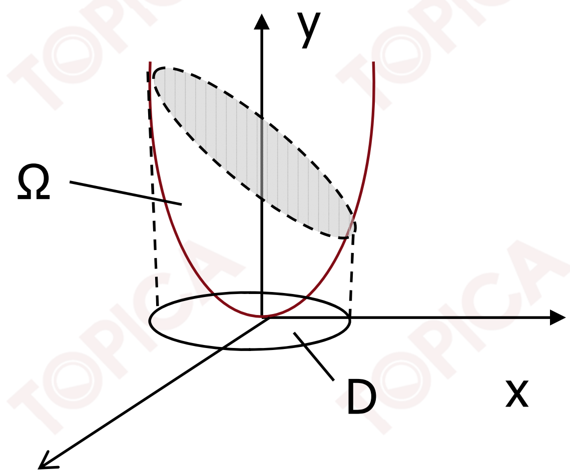
Ví dụ 2: Tính thể tích vật thể Ω bị giới hạn bởi $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Mặt trên là mặt phẳng: $z = 2 - x$

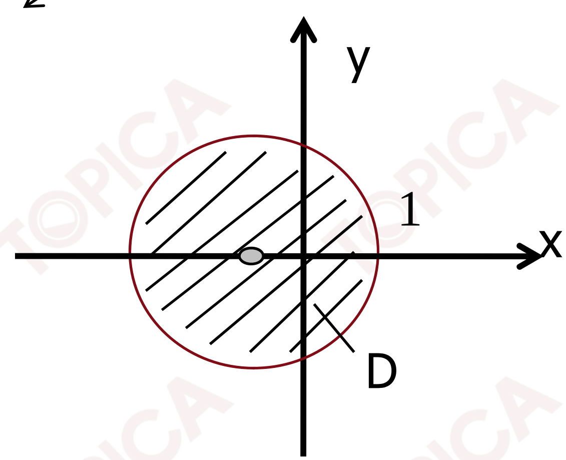
Mặt dưới là mặt paraboloid: $z = x^2 + y^2$

Hình chiếu của Ω lên Oxy là miền D:

$$x^2 + y^2 \le 2 - x \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{9}{4}$$



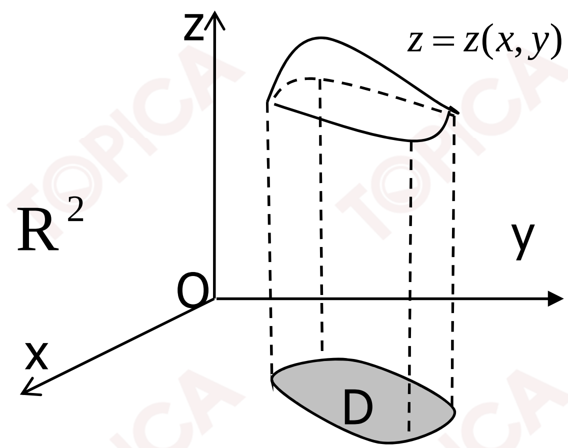
$$\Rightarrow V_\Omega = \iint\limits_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{9}{4}} (2 - x - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$



4.3. TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CONG

Diện tích mặt cong z=z(x,y), có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là miền D, được xác định bởi công thức:

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy}$$

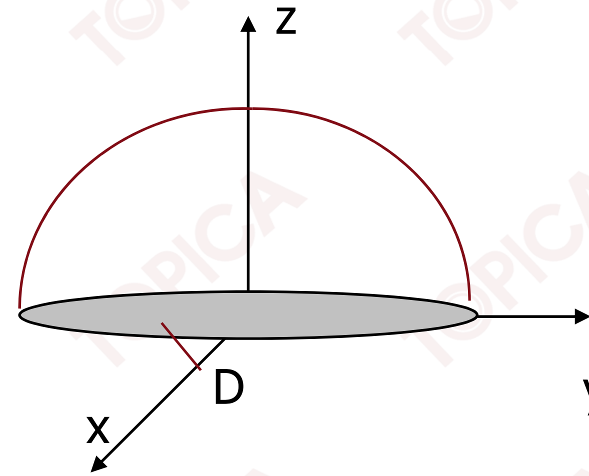


Ví dụ: Tính diện tích nửa mặt cầu (C) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$

(C): $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Hình chiếu của (C) lên Oxy là miền D: $x^2 + y^2 \leq R^2$

$$\Rightarrow S = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$



Đổi biến trong tọa độ cực, ta có:

$$S = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \ldots = 2\pi R^2$$

TÓM LƯỢC CUỐI LƯỢC

Trong bài này chúng ta đã xem xét các nội dung chính sau:

- Khái niệm tích phân kép;
- Cách tính tích phân kép;
- Ứng dụng hình học của tích phân kép: Tính diện tích miền phẳng, tính thể tích vật thể và diện tích mặt cong.