Chương 4
LÝ THUYẾT CHUỖI

- Các khái niệm cơ bản
- Chuỗi số dương
- Chuỗi đan dấu
- Chuỗi có dấu bất kỳ
- Chuỗi lũy thừa

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Chuỗi số

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum u_n$$

- **Số hạng:** $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
- **Tổng riêng thứ *n*:** $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n$
- **Sự hội tụ:** Nếu (S_n) có **giới hạn hữu hạn** S thì ta nói $\sum u_n$ **hội tụ** và có tổng là S. Khi ấy, ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

Nếu (S_n) không có **giới hạn hữu hạn** thì ta nói $\sum u_n$ **phân kỳ.**

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ phân kỳ

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$$

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ $(*)$ $S_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$

- $q = 1,\ \ S_n = n$. Vì $S_n \to \infty$ nên $(*)$ phân kỳ

- $q \neq 1,\qquad S_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$

$$qS_n = q + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

$$(1-q)S_n = 1 - q^n \Longrightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ tồn tại $\Leftrightarrow -1 < q \leq 1$. Mà hiện tại $q \neq 1$, nên (S_n) có giới hạn khi và chỉ khi $-1 < q < 1$. Khi ấy $S_n \to (1-q)^{-1}$.

$(*)$ **hội tụ khi và chỉ khi ? Và tổng ?**

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}} \Rightarrow (S_n)?$$

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ hội tụ} \Longrightarrow u_n \to 0$$

Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Tính chất

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c.u_n = c.S$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

3. Tính hội tụ của chuỗi ***không thay đổi*** khi ***thêm hay bớt*** một số hữu hạn số hạng đầu tiên

CHUỖI DƯƠNG

Ví dụ: Tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$

CHUỖI DƯƠNG

Định nghĩa

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $u_n \geq 0$ với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ: chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi dương.

Vì $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n, \forall n \geq 1$ nên $(S_n) \uparrow$.

Định lý: *Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi* (S_n) *bị chặn.*

Ví dụ: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

CHUỖI DƯƠNG

Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Vì $S_n \to \infty$ nên chuỗi đã cho phân kỳ

CHUỖI DƯƠNG

Tiêu chuẩn tích phân

Giả sử $f(x)$ liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$ và $u_n = f(n)$. Khi ấy,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ hội tụ} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}$$

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

- $\alpha \le 0$: $\frac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ
- $\alpha > 0$: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$ và $\frac{1}{n^\alpha} = f(n)$

Mà $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$

CHUỖI DƯƠNG

Tiêu chuẩn so sánh 1

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi dương thỏa

$$u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$$

Khi ấy, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$$

CHUỖI DƯƠNG

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

CHUỖI DƯƠNG

Tiêu chuẩn so sánh 2

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi dương thỏa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$$

- $K = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- $K = +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.
- $K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

CHUỖI DƯƠNG

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{3^n n}$$

CHUỖI DƯƠNG

Tiêu chuẩn D'Alembert

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi dương thỏa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$$

- $D < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- $D > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

CHUỖI DƯƠNG

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$$

CHUỖI DƯƠNG

Tiêu chuẩn Cauchy

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi dương thỏa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$$

- $C < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- $C > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

CHUỖI DƯƠNG

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

CHUỖI ĐAN DẤU

Định nghĩa: Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + \cdots$$

hay

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \cdots$$

với $b_n \geq 0$ được gọi là chuỗi đan dấu.

Tiêu chuẩn Leibniz: Nếu chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ hay $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ có (b_n) giảm và có giới hạn là 0 thì chuỗi hội tụ.

CHUỖI ĐAN DẤU

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

CHUỖI ĐAN DẤU

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n}{4n-1}$$

CHUỖI ĐAN DẤU

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$$

CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

Định nghĩa: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta gọi chuỗi sau đây là chuỗi các trị tuyệt đối của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

Định nghĩa: Ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối* nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ

Ví dụ: Chuỗi sau đây hội tụ tuyệt đối:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$$

CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

Ví dụ: Chuỗi sau đây không hội tụ tuyệt đối:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Định lý: Nếu $\sum u_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

Chú ý: Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc tiêu chuẩn Cauchy mà biết $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

CHUỖI LŨY THỪA

Định nghĩa: Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad (1)$$

Trong đó, $\boldsymbol{x}$ **là biến** và các $\boldsymbol{c_n}$ là các hằng số, được gọi là các **hệ số** của chuỗi.

- Với mỗi x thì (1) là chuỗi số nên có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Đặt $D = \{x|\ (1)\text{ hội tụ}\}$, **miền hội tụ** của (1).

- Vì $0 \in D$ nên $D \neq \emptyset$ thì tổng chuỗi là hàm f xác định trên D

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x)$$

CHUỖI LŨY THỪA

Ví dụ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (2)$$

- Khi $-1 < x < 1$ thì (2) hội tụ và

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

- Khi $x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$ thì (2) phân kỳ.

- Miền hội tụ của (2) là $D = (-1; 1)$.

CHUỖI LŨY THỪA

Định nghĩa: Chuỗi lũy thừa **tâm tại $\boldsymbol{a}$** là

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n \qquad (3)$$

- Vì khi $x = a$ thì (3) hội tụ nên miền hội tụ của (3) khác rỗng.

CHUỖI LŨY THỪA

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n \qquad (*)$$

- Khi $x = 0$ thì $(*)$ hội tụ.
- Khi $x \neq 0$. Đặt $u_n = n!\,x^n$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\,x^{n+1}|}{|n!\,x^n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = +\infty$$

Suy ra $(*)$ phân kỳ.

- Vậy miền hội tụ của $(*)$ là $D = \{0\}$.

CHUỖI LŨY THỪA

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad (*)$$

- Khi $x = 3$ thì $(*)$ hội tụ.
- Khi $x \neq 3$. Đặt $u_n = \frac{(x-3)^n}{n}$. Ta có

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(x-3)^n}{n}\right|} = \frac{n}{n+1}|x-3| \to |x-3|$$

  - $|x-3| < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$: $(*)$ hội tụ
  - $x < 2 \vee x > 4$: $(*)$ phân kỳ
  - $x = 2$: $(*)$ hội tụ theo Leibniz
  - $x = 4$: $(*)$ phân kỳ

$D = ?$

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \qquad (*)$$

- Khi $x = 0$ thì $(*)$ hội tụ.
- Khi $x \neq 0$. Đặt $u_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. Ta có

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$D = ?$

CHUỖI LŨY THỪA

Định lý: Đối với chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x-a)^n$$

chỉ có thể xảy ra ba khả năng:

1) Chuỗi chỉ hội tụ khi $x = a$.
2) Chuỗi hội tụ với mọi x.
3) Tồn tại số dương R sao cho chuỗi hội tụ khi $|x-a| < R$ và phân kỳ khi $|x-a| > R$.

Số R trong 3) được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi lũy thừa.

Quy ước: Trong 1) thì $R = 0$; trong 2) $R = +\infty$.

CHUỖI LŨY THỪA

Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

CHUỖI LŨY THỪA

Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$